*Ensayos físico-químicos*

# *TEMA 4*

# *ESTADÍSTICA APLICADA AL LABORATORIO*

- ***TRATAMIENTO Y EVALUACIÓN DEL ERROR EXPERIMENTAL***
- ***ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS DATOS***

*Ciclo Formativo Laboratorio de Análisis y Control de Calidad*

# TRATAMIENTO Y EVALUACIÓN DEL ERROR EXPERIMENTAL

## 1. TRATAMIENTO DE ERRORES.

Ante una serie de datos experimentales, nos interesaría disponer de unos parámetros, relativamente sencillos de calcular, que nos pudiesen informar de las relaciones existentes entres los datos para poderlos comparar.

Hay que recordar que el tratamiento matemático de los datos que realizaremos es aplicable exclusivamente a los errores de tipo aleatorio, porque no podemos pretender obtener buenos resultados a partir de datos no fiables o sujetos a errores de tipo sistemático. En este caso, debemos utilizar patrones y auditorías de calidad para detectar y resolver los errores.

Finalmente, nos interesa dar unos márgenes dentro de los cuales se encuentra el valor real con un cierto grado de probabilidad, previamente determinada. Recordemos la siguiente idea:

*"El tratamiento de errores no puede mejorar la calidad de los datos originales"*

### 1.1. PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN.

Son valores alrededor de los cuales se suelen agrupar los datos de una serie estadística. Las más importantes son las siguientes:

#### *Media aritmética* ( $\bar{x}$ )

También llamada *valor medio* o *promedio,* es el valor de tendencia central más utilizado y alrededor del cual se encuentran relacionadas la mayor parte de las variables estadísticas. Su descripción matemática ya se ha visto anteriormente en la definición de error.

#### *Mediana* (med)

Es el valor situado en la mitad de un conjunto de valores ordenados. En la serie ordenada hay tantos valores por encima como por debajo de la mediana. Si la serie tiene un número de datos impar, se toma como mediana el valor medio de los dos datos centrales.

#### *Moda* (mod)

Es aquel valor que tiene la mayor frecuencia de resultados.

## EJEMPLO 1.

Tenemos una tabla de valores como sigue:

| **Valor** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia** | 1 | 4 | 5 | 1 | 10 |

Se pide:

a) Representación gráfica de los valores

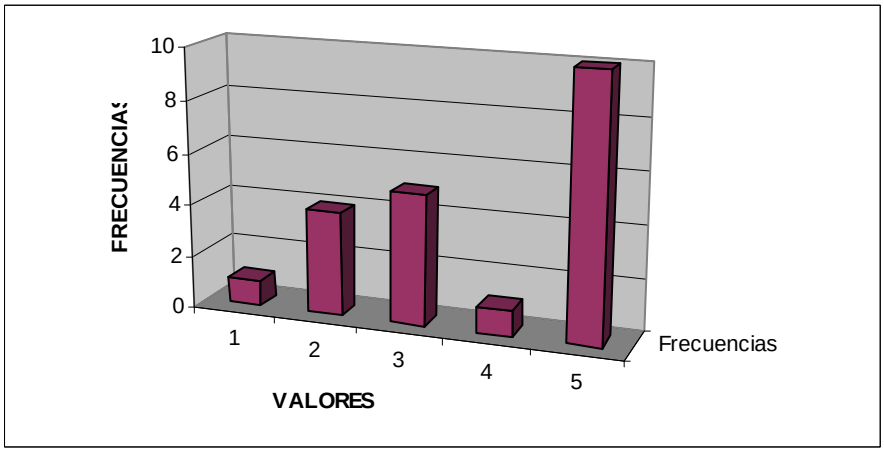
b) La media aritmética (con un decimal).

c) La mediana

d) La moda

## Respuesta:

a) Para la representación gráfica de la serie de valores se ha utilizado un diagrama de columnas en tres dimensiones elaborado con una hoja de cálculo.




b) La media aritmética, sí tomamos un solo decimal será:

$$Media\ aritmética\ (\bar{x}) = \frac{(1\cdot 1+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 1+5\cdot 10)}{(1+4+5+1+10)} = \frac{78}{21} = 3{,}7$$

c) La mediana es el valor que tiene tantos valores por un lado como por el otro:

En este caso corresponde al 4, que es el valor que tienen el mismo número de valores por debajo (1+ 4 + 5 = 10) que por encima (10)

Observemos la serie ordenada:

$$\underbrace{1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3,}_{10\ valores}\quad \mathbf{4},\quad \underbrace{5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5}_{10\ valores}$$

d) La moda es el valor **5**, porque es aquel que tiene la máxima frecuencia, se repite 10 veces.

## 1.2. PARÁMETROS DE DISPERSIÓN:

Sirven para medir el grado de acercamiento de los valores de una serie estadística respecto del conjunto de datos de la serie (caso del rango), o respecto de un valor dado que acostumbra a ser, en los otros casos, la media aritmética.

## Rango (R)

También llamado intervalo o recorrido de una serie estadística, es el valor resultante de la diferencia de los valores extremos superior ($V_{ext\ sup}$) e inferior ($V_{ext\ inf}$) de la tabla de datos experimentales.

El rango es una medida de amplitud de una serie estadística y por tanto de la precisión de datos.

Su expresión matemática es:

$$R = V_{ext\ sup} - V_{ext\ inf}$$

## EJEMPLO 2.

De la serie estadística utilizada en el ejemplo 1, calcular el rango

## Respuesta:

Como: $V_{ext\ inf} = 1$ y $V_{ext\ sup} = 5$, entonces el intervalo será R = 5 – 1 = **4**

## Desviación absoluta ($d_a$)

Es la diferencia, expresada en valor absoluto, entre cada uno de los valores muestrales y la media aritmética. Hay tantas desviaciones absolutas como valores incluidos en la serie.

$$d_a = \left| x_i - \bar{x} \right|$$

**EJEMPLO 3.**

De la serie estadística del ejemplo anterior, queremos conocer la desviación absoluta del valor 5.

**Respuesta:**

$$d_a = \left| x_i - \bar{x} \right| = \left| 5 - 3{,}7 \right| = 1{,}3$$

## Desviación media ($d_m$)

Es el valor medio de las desviaciones absolutas.

Cuando hablábamos de error absoluto manteníamos el signo para saber si un determinado valor estaba por encima o por debajo del valor considerado más probable (la media aritmética). Ahora, en cambio, cuando consideremos la desviación absoluta tendremos en cuenta únicamente su magnitud sin que nos importe el signo y, por este motivo, utilizamos valores absolutos. Eso nos permite operar matemáticamente con toda la serie de resultados y calcular la desviación media como la media aritmética de las desviaciones absolutas:

$$d_m = \frac{\Sigma \left| x_i - \bar{x} \right|}{N} = \frac{\Sigma\ d_a}{N}$$

En el caso de tener datos agrupados por frecuencias absolutas podríamos utilizar la ecuación:

$$d_m = \frac{\Sigma\ f_i \cdot d_a}{N}$$

Observemos que si no utilizáramos valores absolutos, el resultado sería cero y por tanto este parámetro no nos proporcionará ninguna información (se propone comprobarlo en el ejemplo 1).

## Desviación relativa ($d_r$)

Es el tanto por 1, tanto por ciento, o partes por mil de la desviación media respecto al valor medio. Así, por ejemplo, si utilizamos el % la expresión es:

$$\%\ d_r = \frac{100 \cdot d_m}{\bar{x}}$$

## EJEMPLO 4.

Calcular las desviaciones total, media y relativa, en porcentaje, de los datos del ejemplo 1.

## Respuesta:

| $x_i$ | $f_i$ | $f_i \cdot x_i$ | $\bar{x}$ | $d_a$ | $f_i \cdot d_a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3,7143 | 2,7143 | 2,7143 |
| 2 | 4 | 8 | 3,7143 | 1,7143 | 6,8571 |
| 3 | 5 | 15 | 3,7143 | 0,7143 | 3,5714 |
| 4 | 1 | 4 | 3,7143 | 0,2857 | 0,2857 |
| 5 | 10 | 50 | 3,7143 | 1,2857 | 12,8571 |
| Σ | 21 | 78 | | | 26,2857 |

Donde:

$x_i$ = valor.

$f_i$ = frecuencia absoluta. El total de valores es 21.

$\bar{x}$ = media aritmética. En este caso hemos tomado cuatro decimales.

$d_a$ = desviación absoluta, obtenida al restas $x_i$ de $x_m$

La desviación total es: **26,2857**.

La desviación media es: 26,2857 / 21 = **1,2517.**

La desviación relativa, en porcentaje es: 100 x (1,2517 / 3,7143) = **33,7 %.**

Cuanto más dispersos están los resultados, más grandes son los valores de los parámetros de dispersión.

Hay que tener en cuenta que la desviación media nos representa la dispersión de los datos en función de la media aritmética y, como hemos dicho anteriormente, el rango lo hace en función de la amplitud de los datos.

## Desviación estándar (σ).

También llamada normal o típica. Es un parámetro de dispersión de gran utilidad que aparece en la formulación matemática de las distribuciones estadísticas más habituales.

Cuando se estudia todo el conjunto de datos o población que estamos observando, se define matemáticamente como la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones absolutas.

Se suele representar por la letra griega sigma, "σ", cuando se trabaja con todo el conjunto de datos o con la población completa de un registro muestral. Su expresión matemática es la siguiente:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum d_a{}^2}{N}}$$

Lo más habitual es trabajar con una serie de datos experimentales *(muestra),* obtenidos como un subconjunto de la totalidad de las posibles medidas a realizar. En este caso la desviación estándar se representa por la letra "s" y en la expresión anterior sustituimos el denominador N por N-1.

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum d_a{}^2}{N-1}}$$

Es evidente que para series con muchos datos, la diferencia entre N y N-1 prácticamente no existe y el valor de "s" tiende a "σ".

Cuando se trabaja con calculadoras científicas que incorporan funciones estadísticas hay que tener en cuenta que no siempre se respeta este criterio: la desviación estándar para la población puede ser descrita como "$\sigma_N$" o "$s_N$" mientras que para una muestra aparece como "$\sigma_{N-1}$"o "$s_{N-1}$".

En el caso de que los datos estén recogidos a partir de su frecuencia, $f_i$, puede emplearse alternativamente la expresión:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

En el trabajo habitual de laboratorio, de una misma muestra se suelen hacer un número muy limitado de determinaciones sobre un mismo parámetro, en general de tres a cinco y, por este motivo, se utiliza la variable "s".

## *Varianza* (V)

Es una forma de medir la amplitud de la región donde se concreta la probabilidad más alta de encontrar la serie de resultados.

La varianza es un valor ligado al parámetro anterior; corresponde al cuadrado de la desviación estándar:

$$V = s^2$$

No es muy utilizada cuando se tratan datos experimentales; se utiliza en determinados cálculos estadísticos relacionados, sobretodo, con la diferencia de precisiones entre series, tal corno veremos más adelante.

## *Desviación estándar relativa* ($s_r$)

Antes era conocida como *coeficiente de variación,* CV, o bien *coeficiente de variación* de *Pearson.* Es un parámetro que nos permite comparar la distribución de diversas series de datos estadísticas en términos de dispersión relativa.

Matemáticamente es el resultado de dividir la desviación estándar por la media aritmética. Su símbolo es, "$s_r$" pero en la literatura científica anglosajona se prefiere utilizar el acrónimo **RSD** *(relative standard deviation)*,

$$s_r = \frac{s}{\bar{x}}$$

aunque, generalmente, se expresa en forma de porcentaje (%).

$$\%\ s_r = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$$

Este coeficiente es independiente de las unidades utilizadas. Por este motivo es muy útil para comprobar distribuciones que se refieren a magnitudes o variables diferentes. Su inconveniente es la poca utilidad que tiene cuando la media da valores próximos a cero.

# EJERCICIOS RESUELTOS

La mayor parte de estos ejercicios están también resueltos en hoja de cálculo en los apuntes.

## EJERCICIO 1:

En una serie de determinaciones, debemos considerar qué tipo de error se ha cometido. A la vista de los siguientes ejemplos, clasifica el error como sistemático o aleatorio:

a) Tener un termómetro calibrado en grados centígrados para estimar la temperatura hasta una precisión de 0,4 ºC.

b) Hacer pesadas sin poner la balanza a cero cada vez.

c) Utilizar un termómetro con un vacío en la columna de mercurio.

d) Hacer una pesada con la balanza sucia.

e) No saber con exactitud la utilización de los cálculos con moles para una determinada metódica analítica.

**Solución ejercicio 1:**

a) Aleatorio

b) Aleatorio/sistemático

c) Sistemático

d) Sistemático

e) Aleatorio/sistemático

## EJERCICIO 2:

Con una regla se hicieron diez medidas del diámetro de un cilindro. Los datos obtenidos son los siguientes:

3,78 4,08 4,03 3,93 4,04 3,87 4,05 3,95 3,98 3,98

Calcular la media aritmética de estas medidas:

**Solución ejercicio 2:**

La media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{(3{,}78 + 4{,}08 + 4{,}03 + 3{,}93 + 4{,}04 + 3{,}87 + 4{,}05 + 3{,}95 + 3{,}98 + 3{,}98)}{10} = \frac{39{,}69}{10} = 3{,}97$$

## EJERCICIO 3:

La media aritmética de las calificaciones correspondientes a alumnos de química fueron las que indica la tabla siguiente. Calcular la media aritmética de las calificaciones correspondientes a los tres cursos.

| Curso | Media aritmética | Total de alumnos |
|---|---|---|
| 1º | 5,6 | 120 |
| 2º | 6,8 | 65 |
| 3º | 5,2 | 50 |

**Solución ejercicio 3:**

Tenemos que calcular la media aritmética ponderada:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{(x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3)}{(n_1 + n_2 + n_3)}$$

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i \cdot n_i$ |
|---|---|---|
| $x_1 = 5,6$ | $n_1 = 120$ | 672 |
| $x_2 = 6,8$ | $n_2 = 65$ | 442 |
| $x_3 = 5,2$ | $n_3 = 50$ | 260 |
| Σ | 235 | 1374 |

La media aritmética será: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{(x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3)}{(n_1 + n_2 + n_3)} = \frac{1374}{235} = 5,8$

Esta media aritmética ponderada no se podría obtener con las 3 medias aritméticas de cada curso.

## EJERCICIO 4:

Para la obtención de la nota final se tienen en cuenta los exámenes de tres parciales y un examen final. Un alumno obtiene las calificaciones: 5, 9 y 7 en los parciales y un 7,8 en el examen final. Si se acuerda que el examen final tiene un valor del 70 % y cada uno de los parciales un 10 %.

¿Cuál será la calificación redondeada al entero más cercano?

**Solución ejercicio 4:**

Utilizando los distintos porcentajes de las pruebas obtenemos:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{(x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3)}{(n_1 + n_2 + n_3)} = \frac{[(5 \cdot 10) + (9 \cdot 10) + (7,8 \cdot 10) + (7,8 \cdot 70)]}{(10 + 10 + 10 + 70)} = \frac{764}{100} = 7,64 = 8$$

## EJERCICIO 5:

En unas oposiciones que constan de 4 ejercicios se califican dos opositores que han obtenido las siguientes puntuaciones

| Ejercicio | Opositor A | Opositor B |
|---|---|---|
| Química | 9 | 8 |
| Física | 6 | 5 |
| Estadística | 7 | 10 |
| Biología | 10 | 4 |
| ∑ | 32 | 27 |

| Baremo | |
|---|---|
| Química | 3 |
| Física | 1 |
| Estadística | 6 |
| Biología | 2 |
| ∑ | 12 |

La plaza será para el opositor que obtenga la mayor media aritmética ponderada según el baremo anterior.

a) ¿A cuál de los dos opositores corresponde la plaza?

b) ¿Cómo hubiera sido el resultado si el valor medio fuera simple?

**Solución ejercicio 5:**

Calculamos la nota que le corresponde a cada asignatura por su puntuación según el baremo correspondiente:

| Ejercicio | Opositor A | Opositor B |
|---|---|---|
| Química | 9 · 3 = 27 | 8 · 3 = 24 |
| Física | 6 · 1 = 6 | 5 · 1 = 5 |
| Estadística | 7 · 6 = 42 | 10 · 6 = 60 |
| Biología | 10 · 2= 20 | 4 · 2 = 8 |
| Σ | 95 | 97 |

**a)** Las medias obtenidas quedarán ahora como siguen. La plaza será para el opositor B puesto que su media ponderada es mayor.

Opositor A: $\bar{x}_A = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{95}{12} = 7{,}92$

Opositor B: $\bar{x}_B = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{97}{12} = 8{,}08$

**b)** Si la media aritmética fuera simple. La plaza habría sido obtenida por el opositor A.

Opositor A: $\bar{x}_A = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{32}{4} = 8$

Opositor B: $\bar{x}_B = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{27}{4} = 6{,}75$

## EJERCICIO 6:

Un termómetro ha registrado las siguientes temperaturas máximas y mínimas, expresadas en grados centígrados, durante una misma semana:

| Día | Mínima | Máxima |
|---|---|---|
| Lunes | 4 | 17 |
| Martes | 6 | 13 |
| Miércoles | - 3 | 12 |
| Jueves | 2 | 19 |
| Viernes | - 1 | 13 |
| Sábado | 0 | 20 |
| Domingo | 3 | 16 |

a) Temperatura media mínima.

b) Temperatura media máxima.

c) Media de las oscilaciones extremas diarias.

**Solución ejercicio 6:**

Si aplicamos las ecuaciones oportunas:

**a)** La temperatura media mínima es:

$$\bar{x}_{\min} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{(4+6+(-3)+2+(-1)+0+3)}{7} = \frac{11}{7} = 1{,}57..^{o}C = 2^{o}C$$

**b)** La temperatura media máxima es:

$$\bar{x}_{máx} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{(17+13+12+19+13+20+16)}{7} = \frac{110}{7} = 15{,}71..^{o}C = 16^{o}C$$

**c)** Calculamos las oscilaciones:

| Día | Oscilación ºC |
|---|---|
| Lunes | 17 – 4 = 13 |
| Martes | 13 – 6 = 7 |
| Miércoles | 12 – (-3) = 15 |
| Jueves | 19 – 2 = 17 |
| Viernes | 13 – (-1) = 14 |
| Sábado | 20 – 0 = 20 |
| Domingo | 16 – 3 = 13 |

La media aritmética de estas oscilaciones será:

$$\bar{x}_{oscilaciones} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{(13+7+15+17+14+20+13)}{7} = \frac{99}{7} = 14{,}14..^{o}C = 14^{o}C$$

## EJERCICIO 7:

Los resultados obtenidos en un experimento han sido:

52,3 51,7 53,0 51,6 52,5 53,1 52,6 51,8 52,2

a) Calcular el valor medio a partir de todos los datos.

b) Calcular el error relativo (%) cometido por cada uno de los valores.

**Solución ejercicio 7:**

**a)** El valor medio es:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{(52{,}3+51{,}7+53{,}0+51{,}6+52{,}5+53{,}1+52{,}6+51{,}8+52{,}2)}{9} = \frac{470{,}8}{9} = 52{,}311.. = 52{,}3$$

**b)** Para calcular el error relativo para cada uno de los valores aplicamos la fórmula:

$$E_r(\%) = \frac{x_i - \bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100$$ y así obtendremos:

-0,02 -1,17 1,32 -1,36 0,36 1,51 0,55 0,98 0,21

## EJERCICIO 8:

Se han lanzado dos dados 120 veces y se ha anotado cada vez la suma obtenida.

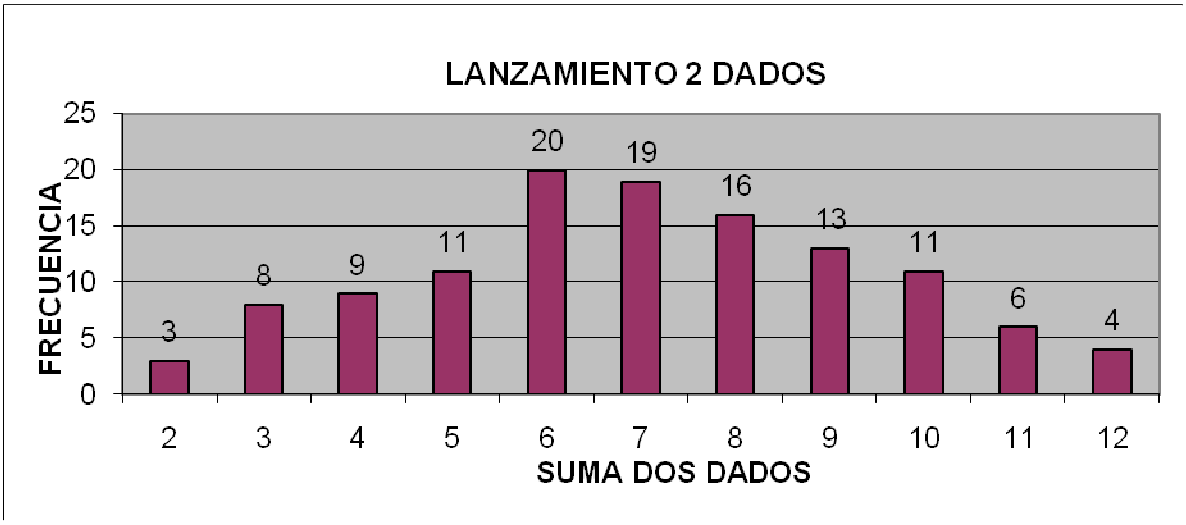
| **Nº de veces** | 3 | 8 | 9 | 11 | 20 | 19 | 16 | 13 | 11 | 6 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Suma conseguida** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

a) Representar el histograma de frecuencias.

b) Encontrar el valor medio y la desviación estándar.

**Solución ejercicio 8:**

**a)** El histograma de frecuencias:



**b)** El valor medio y la desviación estándar:

| Suma | Nº de veces | | | desv. Absol. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| valor (xi) | frecuencia (f) | fi . xi | media | media - xi | fi . da | (da)2 | fi . (da)2 |
| 2 | 3 | 6 | 7,025 | 5,025 | 15,075 | 25,251 | 75,752 |
| 3 | 8 | 24 | 7,025 | 4,025 | 32,200 | 16,201 | 129,605 |
| 4 | 9 | 36 | 7,025 | 3,025 | 27,225 | 9,151 | 82,356 |
| 5 | 11 | 55 | 7,025 | 2,025 | 22,275 | 4,101 | 45,107 |
| 6 | 20 | 120 | 7,025 | 1,025 | 20,500 | 1,051 | 21,013 |
| 7 | 19 | 133 | 7,025 | 0,025 | 0,475 | 0,001 | 0,012 |
| 8 | 16 | 128 | 7,025 | 0,975 | 15,600 | 0,951 | 15,210 |
| 9 | 13 | 117 | 7,025 | 1,975 | 25,675 | 3,901 | 50,708 |
| 10 | 11 | 110 | 7,025 | 2,975 | 32,725 | 8,851 | 97,357 |
| 11 | 6 | 66 | 7,025 | 3,975 | 23,850 | 15,801 | 94,804 |
| 12 | 4 | 48 | 7,025 | 4,975 | 19,900 | 24,751 | 99,003 |
| | 120 | 843 | | | 235,500 | | 710,925 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| media | 7,025 | desv. Total | 235,500 | |
| | | desv. Media | 1,963 | **235,5/120** |
| | | desv. Relativa | 27,936 | **100.(1,96/7,025)** |

Y así, la desviación estándar: $s = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{710{,}925}{119}} = 2{,}44$

## EJERCICIO 9:

En un estudio de 50 cultivos se obtuvieron los siguientes resultados en el recuento de microorganismos:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 78 | 77 | 69 | 80 | 85 | 69 | 78 | 77 | 76 | 69 | 65 | 66 | 78 | 69 |
| 90 | 81 | 82 | 75 | 72 | 73 | 71 | 68 | 67 | 69 | 68 | 78 | 79 | 72 |
| 73 | 92 | 91 | 84 | 86 | 82 | 74 | 72 | 73 | 95 | 76 | 69 | 78 | 77 |
| 95 | 68 | 73 | 72 | 85 | 81 | 80 | 70 | | | | | | |

a) Calcular la mediana del número de microorganismos de los 50 cultivos.

b) Calcular la media aritmética.

c) Calcular la desviación estándar

**Solución ejercicio 9:**

**a)** Ordenando todos los resultados que el valor central es med = 76.

**b)** La media aritmética: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{3827}{50} = 76{,}54 = 77$

**c)** La desviación estándar: $s = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = 7{,}6$

| nº | uFc | media | xi - med | fi . (xi - med)2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 65 | 76,54 | 11,54 | 133,171600 |
| 2 | 66 | 76,54 | 10,54 | 111,091600 |
| 3 | 67 | 76,54 | 9,54 | 91,011600 |
| 4 | 68 | 76,54 | 8,54 | 72,931600 |
| 5 | 68 | 76,54 | 8,54 | 72,931600 |
| 6 | 68 | 76,54 | 8,54 | 72,931600 |
| 7 | 69 | 76,54 | 7,54 | 56,851600 |
| 8 | 69 | 76,54 | 7,54 | 56,851600 |
| 9 | 69 | 76,54 | 7,54 | 56,851600 |
| 10 | 69 | 76,54 | 7,54 | 56,851600 |
| 11 | 69 | 76,54 | 7,54 | 56,851600 |
| 12 | 69 | 76,54 | 7,54 | 56,851600 |
| 13 | 70 | 76,54 | 6,54 | 42,771600 |
| 14 | 71 | 76,54 | 5,54 | 30,691600 |
| 15 | 72 | 76,54 | 4,54 | 20,611600 |
| 16 | 72 | 76,54 | 4,54 | 20,611600 |
| 17 | 72 | 76,54 | 4,54 | 20,611600 |
| 18 | 72 | 76,54 | 4,54 | 20,611600 |
| 19 | 73 | 76,54 | 3,54 | 12,531600 |
| 20 | 73 | 76,54 | 3,54 | 12,531600 |
| 21 | 73 | 76,54 | 3,54 | 12,531600 |
| 22 | 73 | 76,54 | 3,54 | 12,531600 |
| 23 | 74 | 76,54 | 2,54 | 6,451600 |
| 24 | 75 | 76,54 | 1,54 | 2,371600 |
| 25 | 76 | 76,54 | 0,54 | 0,291600 |
| 26 | 76 | 76,54 | 0,54 | 0,291600 |
| 27 | 77 | 76,54 | 0,46 | 0,211600 |
| 28 | 77 | 76,54 | 0,46 | 0,211600 |
| 29 | 77 | 76,54 | 0,46 | 0,211600 |
| 30 | 78 | 76,54 | 1,46 | 2,131600 |
| 31 | 78 | 76,54 | 1,46 | 2,131600 |
| 32 | 78 | 76,54 | 1,46 | 2,131600 |
| 33 | 78 | 76,54 | 1,46 | 2,131600 |
| 34 | 78 | 76,54 | 1,46 | 2,131600 |
| 35 | 79 | 76,54 | 2,46 | 6,051600 |
| 36 | 80 | 76,54 | 3,46 | 11,971600 |
| 37 | 80 | 76,54 | 3,46 | 11,971600 |
| 38 | 81 | 76,54 | 4,46 | 19,891600 |
| 39 | 81 | 76,54 | 4,46 | 19,891600 |
| 40 | 82 | 76,54 | 5,46 | 29,811600 |
| 41 | 82 | 76,54 | 5,46 | 29,811600 |
| 42 | 84 | 76,54 | 7,46 | 55,651600 |
| 43 | 85 | 76,54 | 8,46 | 71,571600 |
| 44 | 85 | 76,54 | 8,46 | 71,571600 |
| 45 | 86 | 76,54 | 9,46 | 89,491600 |
| 46 | 90 | 76,54 | 13,46 | 181,171600 |
| 47 | 91 | 76,54 | 14,46 | 209,091600 |
| 48 | 92 | 76,54 | 15,46 | 239,011600 |
| 49 | 95 | 76,54 | 18,46 | 340,771600 |
| 50 | 95 | 76,54 | 18,46 | 340,771600 |
| | 3827 | | | 2850,420000 |

| | |
|---|---|
| media | 76,54 |

| | |
|---|---|
| desv estándar | 7,6 |

## EJERCICIO 10:

Los resultados de una prueba sobre el nivel de glucosa realizada a niños son los siguientes:

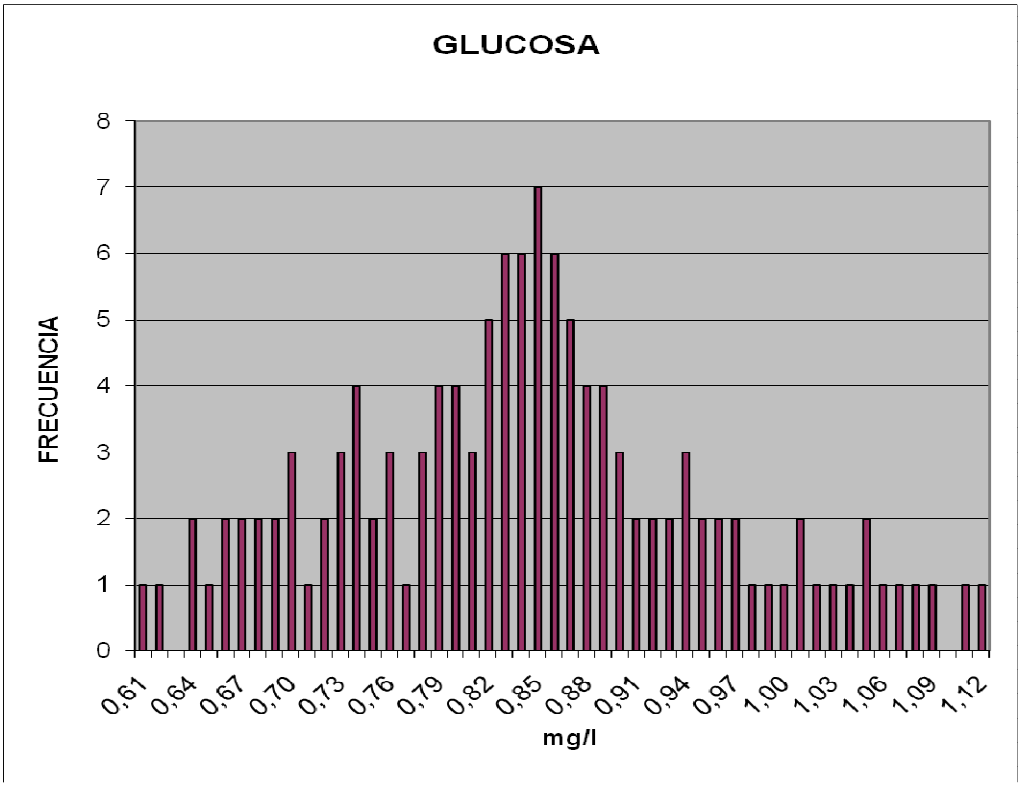
| frecuencia | glucosa |
|---|---|
| fi | g/l |
| 1 | 0,61 |
| 1 | 0,62 |
| 0 | 0,00 |
| 2 | 0,64 |
| 1 | 0,65 |
| 2 | 0,66 |
| 2 | 0,67 |
| 2 | 0,68 |
| 2 | 0,69 |
| 3 | 0,70 |
| 1 | 0,71 |
| 2 | 0,72 |
| 3 | 0,73 |
| 4 | 0,74 |
| 2 | 0,75 |
| 3 | 0,76 |
| 1 | 0,77 |
| 3 | 0,78 |
| 4 | 0,79 |
| 4 | 0,80 |
| 3 | 0,81 |
| 5 | 0,82 |
| 6 | 0,83 |
| 6 | 0,84 |
| 7 | 0,85 |
| 6 | 0,86 |
| 5 | 0,87 |
| 4 | 0,88 |
| 4 | 0,89 |
| 3 | 0,90 |
| 2 | 0,91 |
| 2 | 0,92 |
| 2 | 0,93 |
| 3 | 0,94 |
| 2 | 0,95 |
| 2 | 0,96 |
| 2 | 0,97 |
| 1 | 0,98 |
| 1 | 0,99 |
| 1 | 1,00 |
| 2 | 1,01 |
| 1 | 1,02 |
| 1 | 1,03 |
| 1 | 1,04 |
| 2 | 1,05 |
| 1 | 1,06 |
| 1 | 1,07 |
| 1 | 1,08 |
| 1 | 1,09 |
| 0 | 0,00 |
| 1 | 1,11 |
| 1 | 1,12 |

a) Realizar la gráfica de datos y calcular el valor medio, la moda y la mediana.

b) Calcular la desviación media y la desviación estándar.

**Solución ejercicio 10:**

**a)** La gráfica de datos:



Los resultados con una hoja de cálculo:

| fi | g/l | xi . fi | media | xi - med | fi . (xi - med) | fi . (xi - med)2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,61 | 0,61 | 0,84 | 0,233948 | 0,233984 | 0,054732 |
| 1 | 0,62 | 0,62 | 0,84 | 0,223948 | 0,223984 | 0,050153 |
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,84 | 0,213948 | 0,000000 | 0,000000 |
| 2 | 0,64 | 1,28 | 0,84 | 0,203948 | 0,407967 | 0,083190 |
| 1 | 0,65 | 0,65 | 0,84 | 0,193948 | 0,193984 | 0,037616 |
| 2 | 0,66 | 1,32 | 0,84 | 0,183948 | 0,367967 | 0,067674 |
| 2 | 0,67 | 1,34 | 0,84 | 0,173948 | 0,347967 | 0,060516 |
| 2 | 0,68 | 1,36 | 0,84 | 0,163948 | 0,327967 | 0,053758 |
| 2 | 0,69 | 1,38 | 0,84 | 0,153948 | 0,307967 | 0,047400 |
| 3 | 0,70 | 2,10 | 0,84 | 0,143948 | 0,431951 | 0,062163 |
| 1 | 0,71 | 0,71 | 0,84 | 0,133948 | 0,133984 | 0,017942 |
| 2 | 0,72 | 1,44 | 0,84 | 0,123948 | 0,247967 | 0,030726 |
| 3 | 0,73 | 2,19 | 0,84 | 0,113948 | 0,341951 | 0,038952 |
| 4 | 0,74 | 2,96 | 0,84 | 0,103948 | 0,415935 | 0,043221 |
| 2 | 0,75 | 1,50 | 0,84 | 0,093948 | 0,187967 | 0,017652 |
| 3 | 0,76 | 2,28 | 0,84 | 0,083948 | 0,251951 | 0,021142 |
| 1 | 0,77 | 0,77 | 0,84 | 0,073948 | 0,073984 | 0,005468 |
| 3 | 0,78 | 2,34 | 0,84 | 0,063948 | 0,191951 | 0,012268 |
| 4 | 0,79 | 3,16 | 0,84 | 0,053948 | 0,215935 | 0,011642 |
| 4 | 0,80 | 3,20 | 0,84 | 0,043948 | 0,175935 | 0,007726 |
| 3 | 0,81 | 2,43 | 0,84 | 0,033948 | 0,101951 | 0,003457 |
| 5 | 0,82 | 4,10 | 0,84 | 0,023948 | 0,119919 | 0,002868 |
| 6 | 0,83 | 4,98 | 0,84 | 0,013948 | 0,083902 | 0,001167 |
| 6 | 0,84 | 5,04 | 0,84 | 0,003948 | 0,023902 | 0,000094 |
| 7 | 0,85 | 5,95 | 0,84 | 0,006052 | 0,042114 | 0,000256 |
| 6 | 0,86 | 5,16 | 0,84 | 0,016052 | 0,096098 | 0,001546 |
| 5 | 0,87 | 4,35 | 0,84 | 0,026052 | 0,130081 | 0,003394 |
| 4 | 0,88 | 3,52 | 0,84 | 0,036052 | 0,144065 | 0,005199 |
| 4 | 0,89 | 3,56 | 0,84 | 0,046052 | 0,184065 | 0,008483 |
| 3 | 0,90 | 2,70 | 0,84 | 0,056052 | 0,168049 | 0,009425 |
| 2 | 0,91 | 1,82 | 0,84 | 0,066052 | 0,132033 | 0,008726 |
| 2 | 0,92 | 1,84 | 0,84 | 0,076052 | 0,152033 | 0,011568 |
| 2 | 0,93 | 1,86 | 0,84 | 0,086052 | 0,172033 | 0,014810 |
| 3 | 0,94 | 2,82 | 0,84 | 0,096052 | 0,288049 | 0,027678 |
| 2 | 0,95 | 1,90 | 0,84 | 0,106052 | 0,212033 | 0,022494 |
| 2 | 0,96 | 1,92 | 0,84 | 0,116052 | 0,232033 | 0,026936 |
| 2 | 0,97 | 1,94 | 0,84 | 0,126052 | 0,252033 | 0,031778 |
| 1 | 0,98 | 0,98 | 0,84 | 0,136052 | 0,136016 | 0,018510 |
| 1 | 0,99 | 0,99 | 0,84 | 0,146052 | 0,146016 | 0,021331 |
| 1 | 1,00 | 1,00 | 0,84 | 0,156052 | 0,156016 | 0,024352 |
| 2 | 1,01 | 2,02 | 0,84 | 0,166052 | 0,332033 | 0,055147 |
| 1 | 1,02 | 1,02 | 0,84 | 0,176052 | 0,176016 | 0,030994 |
| 1 | 1,03 | 1,03 | 0,84 | 0,186052 | 0,186016 | 0,034615 |
| 1 | 1,04 | 1,04 | 0,84 | 0,196052 | 0,196016 | 0,038436 |
| 2 | 1,05 | 2,10 | 0,84 | 0,206052 | 0,412033 | 0,084915 |
| 1 | 1,06 | 1,06 | 0,84 | 0,216052 | 0,216016 | 0,046678 |
| 1 | 1,07 | 1,07 | 0,84 | 0,226052 | 0,226016 | 0,051100 |
| 1 | 1,08 | 1,08 | 0,84 | 0,236052 | 0,236016 | 0,055721 |
| 1 | 1,09 | 1,09 | 0,84 | 0,246052 | 0,246016 | 0,060542 |
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,84 | 0,256052 | 0,000000 | 0,000000 |
| 1 | 1,11 | 1,11 | 0,84 | 0,266052 | 0,266016 | 0,070784 |
| 1 | 1,12 | 1,12 | 0,84 | 0,276052 | 0,276016 | 0,076205 |
| 123 | | 103,81 | | | 10,821951 | 1,573148 |

**a)** Valor medio: 0,84 (0,84398…)

Moda: 0,85

Mediana: 0,84

**b)** Desviación media: 0,08798…

Desviación estándar: 0,11355…

## EJERCICIO 11:

Calculamos el contenido en $Ca^{2+}$ en una muestra de 200 ml de agua, obteniendo los siguientes resultados, expresados en g de Ca por cada 100 ml de agua.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0,04045 | 0,04040 | 0,04038 | 0,04042 | 0,04035 |
| 0,04042 | 0,04044 | 0,04045 | 0,04038 | 0,04039 |

a) Calcular el valor medio, la moda y la mediana.

b) La desviación estándar.

**Solución ejercicio 11:**

**a)** El valor medio: 0,04041

La moda: no existe ningún dato destacado y que se repita más que otros.

La mediana: 0,04041

**b)** La desviación estándar: $s = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = 0{,}000033599 = 3{,}3599 \cdot 10^{-5}$

## EJERCICIO 12:

Tenemos 15 números con una media aritmética igual a 56; otro conjunto también de 15 números con una media de 30; la desviación estándar de los 30 números juntos es 12.

Calcular la desviación estándar relativa del conjunto de los 30 números.

**Solución ejercicio 12:**

| números | media | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| fi | valor | media | xi - med | fi.(xi-med) | fi.(xi-med)2 |
| 15 | 56 | 43 | 13 | 195 | 2535 |
| 15 | 30 | 43 | 13 | 195 | 2535 |
| 30 | | | | | 5070 |

La media será: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{(56+30)}{2} = \frac{86}{2} = 43$

La desviación estándar de los 30 números es: $s = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = 13$

La desviación estándar relativa será: $s_r = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{13}{43} = 0{,}30$

Y la desviación estándar relativa en % será: $\%\ s_r = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{13}{43} \cdot 100 = 30\ \%$

## EJERCICIO 13:

Se observa en la figura el número de errores cometidos por distintos laboratorios durante un año.

| nº laboratorios | nº errores |
|---|---|
| 3 | 1 |
| 7 | 3 |
| 5 | 5 |
| 5 | 7 |
| 5 | 9 |
| 4 | 11 |
| 5 | 13 |
| 2 | 15 |
| 4 | 17 |
| 2 | 19 |
| 3 | 21 |
| 1 | 23 |
| 2 | 25 |
| 2 | 27 |

a) Calcular la desviación estándar relativa de los datos

**Solución ejercicio 13:**

**a)** Se puede elaborar una tabla con ayuda del programa excel como sigue.

| errores | laboratorios | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| xi | fi | xi . fi | med | (xi - med) | (xi - med)2 | fi . (xi - med)2 |
| 1 | 3 | 3 | 11,28 | 10,28 | 105,6784 | 317,0352 |
| 3 | 7 | 21 | 11,28 | 8,28 | 68,5584 | 479,9088 |
| 5 | 5 | 25 | 11,28 | 6,28 | 39,4384 | 197,192 |
| 7 | 5 | 35 | 11,28 | 4,28 | 18,3184 | 91,592 |
| 9 | 5 | 45 | 11,28 | 2,28 | 5,1984 | 25,992 |
| 11 | 4 | 44 | 11,28 | 0,28 | 0,0784 | 0,3136 |
| 13 | 5 | 65 | 11,28 | 1,72 | 2,9584 | 14,792 |
| 15 | 2 | 30 | 11,28 | 3,72 | 13,8384 | 27,6768 |
| 17 | 4 | 68 | 11,28 | 5,72 | 32,7184 | 130,8736 |
| 19 | 2 | 38 | 11,28 | 7,72 | 59,5984 | 119,1968 |
| 21 | 3 | 63 | 11,28 | 9,72 | 94,4784 | 283,4352 |
| 23 | 1 | 23 | 11,28 | 11,72 | 137,3584 | 137,3584 |
| 25 | 2 | 50 | 11,28 | 13,72 | 188,2384 | 376,4768 |
| 27 | 2 | 54 | 11,28 | 15,72 | 247,1184 | 494,2368 |
| | **50** | **564** | | | | **2696,08** |

La media será: $\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{n} = \frac{564}{50} = 11{,}28$

La desviación estándar será: $s = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{2696{,}08}{49}} = 7{,}42$

La desviación estándar relativa será: % $s_r = \frac{s}{x} \cdot 100 = \frac{7,42}{11,28} \cdot 100 = 66$ %

## EJERCICIO 14:

Los resultados obtenidos en un análisis de calcio por tres métodos distintos son:

| Método | % Ca | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | 73,2 | 73,0 | 73,4 | 73,3 |
| B | 69,8 | 71,4 | 71,3 | 70,2 |
| C | 70,7 | 71,1 | 71,7 | 71,5 |

Qué método es más exacto? ¿Cuál tiene más precisión?

**Solución ejercicio 14:**

**EXACTITUD**

| Porcentaje real de Ca en CaO | 71,3 |
|---|---|

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| | 73,2 | 69,8 | 70,7 |
| | 73,0 | 71,4 | 71,1 |
| | 73,4 | 71,3 | 71,7 |
| | 73,3 | 70,2 | 71,5 |
| **∑** | **292,9** | **282,7** | **285,0** |
| **Media** | 73,225 | 70,675 | 71,250 |
| **Ea** | 1,925 | -0,625 | -0,050 |
| **Er** | 2,700 | -0,877 | -0,070 |

Ea es el error absoluto = (media laboratorio – valor real)

Er es el error relativo = (error absoluto/media) x 100

El método más exacto es el C puesto que tiene un menor error absoluto

**PRECISIÓN**

Hacemos una tabla con los datos y calculamos "s" con la fórmula: $s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| | lxi - medl2 | lxi - medl2 | lxi - medl2 |
| | 0,001 | 0,766 | 0,302 |
| | 0,051 | 0,526 | 0,023 |
| | 0,031 | 0,391 | 0,203 |
| | 0,006 | 0,226 | 0,063 |
| **∑** | **0,088** | **1,908** | **0,590** |
| **"s"** | 0,17 | 0,80 | 0,44 |

El valor más pequeño de "s" indica una mayor precisión, en este caso el método A

## EJERCICIO 15:

En la tabla se observan los resultados de cinco laboratorios en el análisis de una muestra de suero sanguíneo. Se han realizado seis determinaciones de albúmina en suero con los siguientes resultados:

| Laboratorio | Concentración de albúmina en suero en g/l | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 41,3 | 42,3 | 42,1 | 41,2 | 42,9 | 41,7 |
| 2 | 43,7 | 39,7 | 40,2 | 41,8 | 43,5 | 42,2 |
| 3 | 43,7 | 43,4 | 42,9 | 43,1 | 43,8 | 42,6 |
| 4 | 42,3 | 35,2 | 43,1 | 40,6 | 36,9 | 37,2 |
| 5 | 39,1 | 41,5 | 42,0 | 42,5 | 42,5 | 41,7 |

La muestra estándar de suero contiene 42,1 gramos de albúmina por litro de suero.

Comentar la precisión y la exactitud de los cinco laboratorios.

**Solución ejercicio 15:**

Calcularemos las medias de cada laboratorio para luego calcular la exactitud mediante el error absoluto (diferencia entre el valor real y el valor experimental), y el error relativo (% del valor real).

**EXACTITUD**

| Muestra estándar de suero | 42,1 |
|---|---|

| | Lab 1 | Lab 2 | Lab 3 | Lab 4 | Lab 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 41,3 | 43,7 | 43,7 | 42,3 | 39,1 |
| | 42,3 | 39,7 | 43,4 | 35,2 | 41,5 |
| | 42,1 | 40,2 | 42,9 | 43,1 | 42 |
| | 41,2 | 41,8 | 43,1 | 40,6 | 42,5 |
| | 42,9 | 43,5 | 43,8 | 36,9 | 41,9 |
| | 41,7 | 42,2 | 42,6 | 37,2 | 41,7 |
| **∑** | **251,5** | **251,1** | **259,5** | **235,3** | **248,7** |
| **Media** | 41,92 | 41,85 | 43,25 | 39,22 | 41,45 |
| **Ea** | -0,18 | -0,25 | 1,15 | -2,88 | -0,65 |
| **Er** | -0,44 | -0,59 | 2,73 | -6,85 | -1,54 |

Ea es error absoluto = media laboratorio - valor real

Er es error relativo = (error absoluto / media) x 100

| | |
|---|---|
| **EXACTITUD** | LAS DETERMINACIONES QUE PRESENTAN UNA MEJOR EXACTITUD SON AQUELLAS QUE TIENEN UN ERROR MÁS PEQUEÑO (CON INDEPENDENCIA DE SU SIGNO), ES DECIR EL LABORATORIO 1 |

**PRECISIÓN**

Hacemos una tabla con los datos y calculamos "s" con la fórmula: $s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$

| | Lab 1 | Lab 2 | Lab 3 | Lab 4 | Lab 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| | Ixi - medI2 | Ixi - medI2 | Ixi - medI2 | Ixi - medI2 | Ixi - medI2 |
| | 0,38 | 3,42 | 0,20 | 9,51 | 5,52 |
| | 0,15 | 4,62 | 0,02 | 16,13 | 0,00 |
| | 0,03 | 2,72 | 0,12 | 15,08 | 0,30 |
| | 0,51 | 0,00 | 0,02 | 1,91 | 1,10 |
| | 0,97 | 2,72 | 0,30 | 5,37 | 0,20 |
| | 0,05 | 0,12 | 0,42 | 4,07 | 0,06 |
| **∑** | **2,09** | **13,62** | **1,10** | **52,07** | **7,19** |
| **"s"** | 0,65 | 1,65 | 0,47 | 3,23 | 1,20 |

El valor más pequeño de "s" indica una mayor precisión, en este caso con el laboratorio 3

## EJERCICIO 16:

En la realización de un estudio del peso de los estudiantes de un instituto se obtienen los datos:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 55 | 56 | 56 | 56 | 57 | 57 | 58 | 58 | 58 | 59 | 59 | 59 |
| 60 | 60 | 61 | 61 | 61 | 62 | 62 | 63 | 63 | 63 | 63 | 64 | 64 |
| 64 | 65 | 65 | 65 | 65 | 65 | 66 | 66 | 66 | 67 | 67 | 67 | 68 |
| 68 | 68 | 69 | 69 | 69 | 69 | 70 | 70 | 70 | 71 | 71 | | |

a) Calcular el valor medio, la moda y la mediana.

b) Calcular la desviación estándar, la desviación estándar relativa y la varianza.

**Solución ejercicio 16:**

**a)** El valor medio: $\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{n} = \frac{[(55\cdot 2)+(56\cdot 3)+(57\cdot 2)+\ldots+(71\cdot 2)]}{50} = 63{,}4 \ kg$

La moda: 65 kg

Mediana: 64 kg

**b)** La desviación estándar: $s = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = 4{,}71$

La desviación estándar relativa: $s_r = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{4{,}71}{63{,}4} = 0{,}074$

La varianza: v = $s^2$ = 22,163

## EJERCICIO 17:

Los resultados obtenidos en la determinación del volumen de una pipeta fueron los siguientes:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 19,969 | 19,980 | 19,970 | 19,977 | 19,970 | 19,978 | 19,973 |
| 19,979 | 19,981 | 19,976 | 19,976 | 19,972 | 19,973 | 19,979 |
| 19,979 | 19,973 | 19,972 | 19,980 | 19,977 | 19,980 | |

a) Calcular el valor medio, la moda y la mediana.

b) Calcular la desviación estándar, la desviación estándar relativa y la varianza.

**Solución ejercicio 17:**

**a)** El valor medio: $\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{n} = \frac{[(19{,}969) + (19{,}970 \cdot 2) + \ldots + (19{,}980)]}{20} = 19{,}976 \ ml$

La moda: no existe porque no hay datos con mayor frecuencia que los demás.

Mediana: 19,9765 ml

**b)** La desviación estándar: $s = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = 0{,}003868 = 3{,}868 \cdot 10^{-3}$

La desviación estándar relativa: $s_r = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{3{,}868 \cdot 10^{-3}}{19{,}976} = 0{,}001936 = 1{,}936 \cdot 10^{-3}$

La varianza: $v = s^2 = 0{,}00001496 = 1{,}496 \cdot 10^{-5}$

## EJERCICIO 18:

Se han obtenido los siguientes resultados en el porcentaje de CaO en $CaCO_3$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 56,00 | 56,23 | 56,20 | 56,95 | 56,08 | 56,10 | 56,15 | 56,20 |
| 56,01 | 55,98 | 56,15 | 56,18 | 56,15 | 56,20 | 56,22 | |

a) Calcular el valor medio, la moda y la mediana.

b) Calcular la desviación estándar, la desviación estándar relativa y la varianza.

**Solución ejercicio 18:**

**a)** El valor medio: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{[(56{,}00) + (56{,}01) + \ldots + (56{,}23)]}{15} = 56{,}12\%$

La moda: no existe porque no hay datos con mayor frecuencia que los demás.

Mediana: 56,18 %

**b)** La desviación estándar: $s = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = 0{,}0944$

La desviación estándar relativa: $s_r = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{0{,}0944}{56{,}12} = 0{,}001682.. = 1{,}682 \cdot 10^{-3}$

La varianza: $v = s^2 = (0{,}0944)^2 = 0{,}008911\ldots = 8{,}911 \cdot 10^{-3}$

## EJERCICIO 19:

En un análisis realizado sobre la cantidad de alcohol en vino blanco se obtienen los siguientes resultados:

12,61 12,53 12,72 12,58 12,69 12,70 12,68 12,65

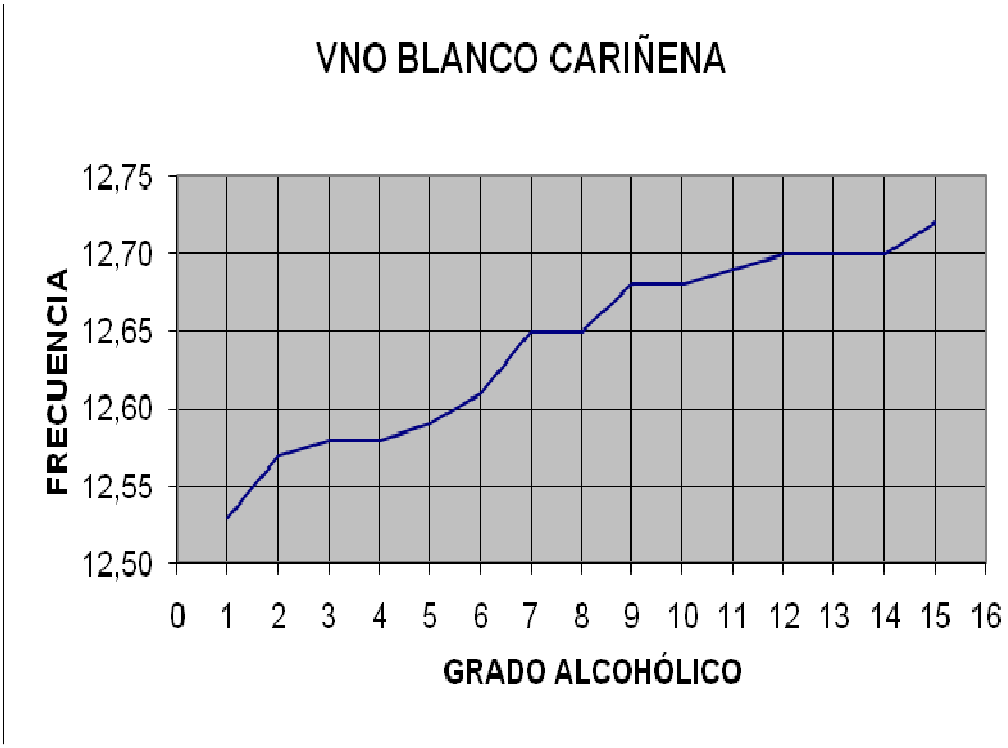
12,59 12,70 12,65 12,68 12,70 12,57 12,58

a) Realizar la gráfica de resultados y calcular el valor medio, la moda y la mediana.

b) Calcular el rango, la desviación estándar y la varianza.

**Solución ejercicio 19:**

**a)** El gráfico podría quedar como el siguiente:




El valor medio: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{[(12{,}53) + (112{,}57) + \ldots + (12{,}72)]}{15} = 12{,}64$ º

La moda: 12,7

Mediana: 12,65

**b)** Calculamos el rango: R = $V_{ext\ sup}$ – $V_{ext\ inf}$ = 12,72 – 12,53 = 0,19

La desviación estándar: $s = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = 0{,}0601$

La varianza: v = $s^2$ = $(0{,}0601)^2$ = 0,00336

## EJERCICIO 20:

Se mide el contenido en Cu de 10 muestras de combustible. La cantidad en ppm de Cu:

8,53 8,56 8,91 8,60 8,72 8,63 8,70 8,84 8,90 8,77

a) Calcular el valor medio, la moda y la mediana.

b) Calcular el rango, la desviación estándar y la varianza.

**Solución ejercicio 20:**

**a)** El valor medio: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{[(8{,}53) + (8{,}56) + \ldots + (8{,}91)]}{10} = 8{,}716 \ \ ppm$

La moda: no existe porque no hay datos con mayor frecuencia que los demás.

Mediana: 8,71

**b)** Calculamos el rango: $R = V_{ext\ sup} - V_{ext\ inf} = 8{,}91 - 8{,}53 = 0{,}38$

La desviación estándar: $s = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = 0{,}137372$

La varianza: $v = s^2 = (0{,}137372)^2 = 0{,}0118871066$

# ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS DATOS

## 1. DISTRIBUCIONES.

Aunque en el laboratorio no es frecuente el uso de cantidades importantes de datos, en este apartado veremos como se trabaja con gran cantidad de datos, hecho muy frecuente en otras disciplinas.

### 1.1. Definición de distribuciones.

Una distribución es una representación de la frecuencia (absoluta o relativa) de los datos obtenidos en función de los valores de la variable estudiada. Las variables utilizadas son:

$f_{rel}$ = frecuencia relativa = tanto por 1 de un determinado caso sobre el total.

f = frecuencia absoluta de un caso determinado.

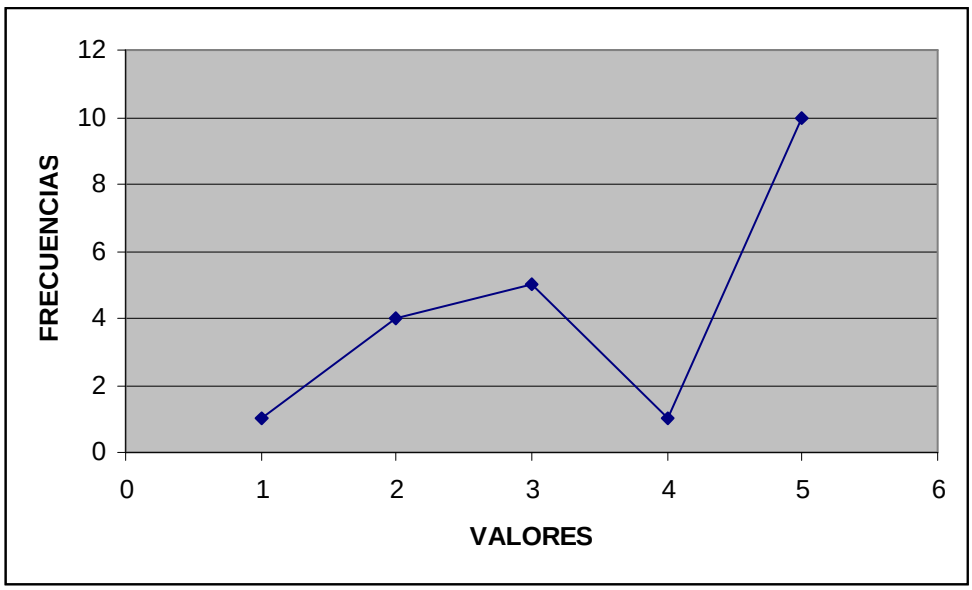
N = número de casos.

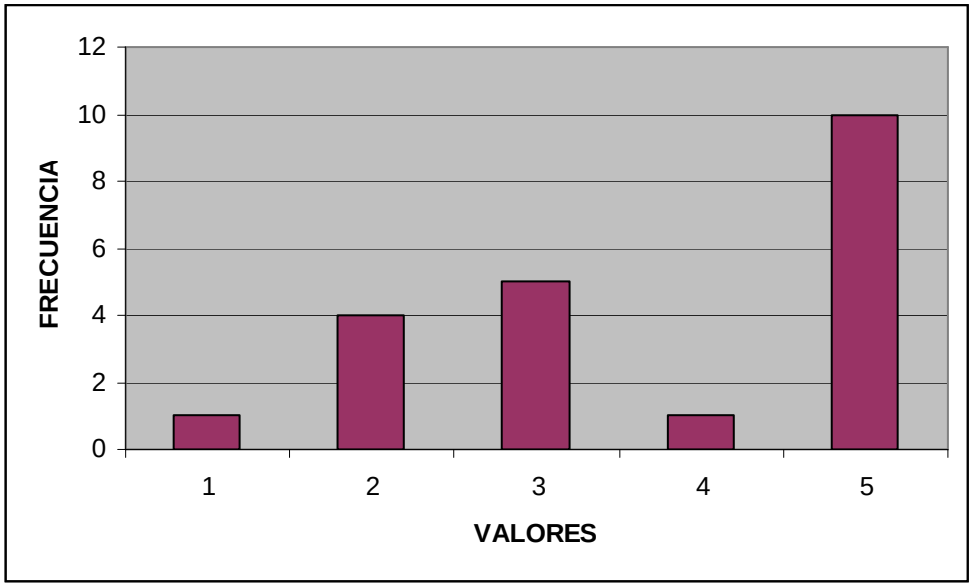
$$f_{rel} = \frac{f}{N}$$

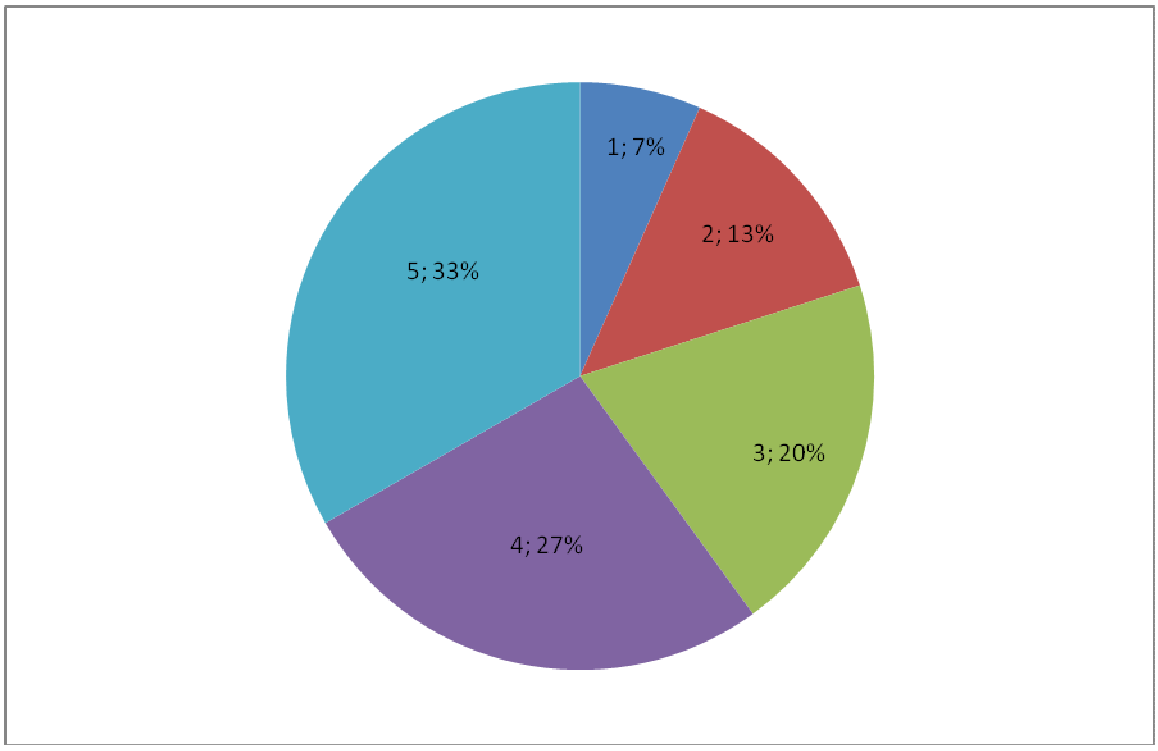
En el siguiente ejemplo podemos estudiar una de estas distribuciones:

| **Valor ($x_i$)** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia (f)** | 1 | 4 | 5 | 1 | 10 |

Viendo la tabla de datos no nos damos cuenta de que tendencia o aspecto tiene esta distribución, pero podemos hacernos una idea si lo representamos gráficamente con distintos tipos de gráficos.






Se muestran en los gráficos anteriores: un diagrama de puntos (y líneas), uno de barras considerando los valores obtenidos con sus frecuencias absolutas y finalmente, un diagrama circular donde figura la frecuencia relativa (en %) de cada valor, relacionando la superficie del sector con el porcentaje que corresponde a cada uno de los datos. En todos los casos son los correspondientes a la tabla de valores.

En ocasiones se pueden utilizar diagramas mixtos que combinen varias distribuciones para poder compararlas.

## 1.2. Clasificación de las distribuciones:

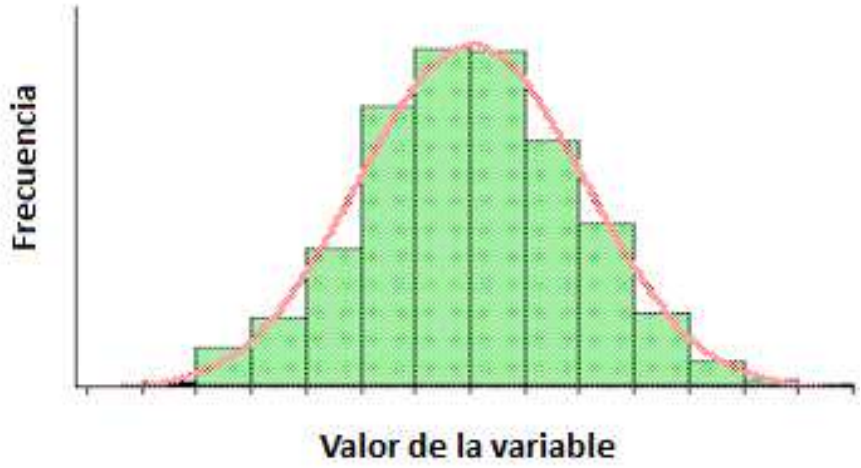
Las distribuciones pueden ser clasificadas según tres criterios independientes:

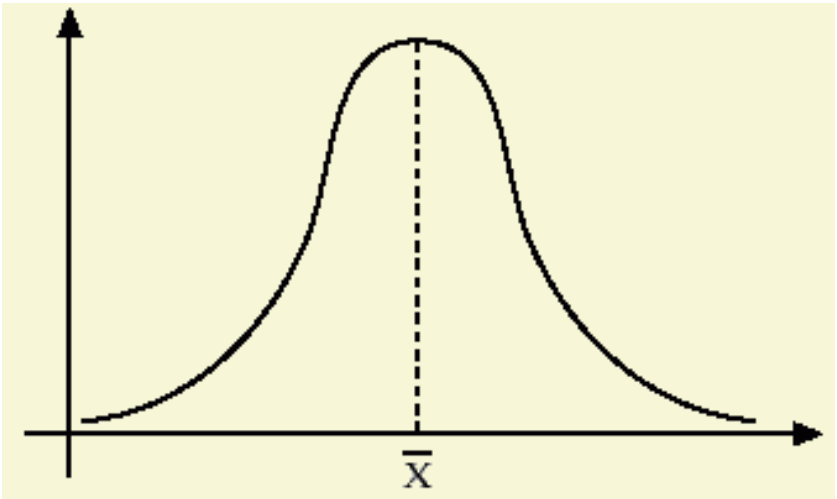
- Su forma.
- Su simetría.
- Su amplitud.

## Distribuciones según su forma:

La información gráfica es muy importante porque nos muestra realmente la agrupación de los datos y nos permite observar la posible polarización o desviación.

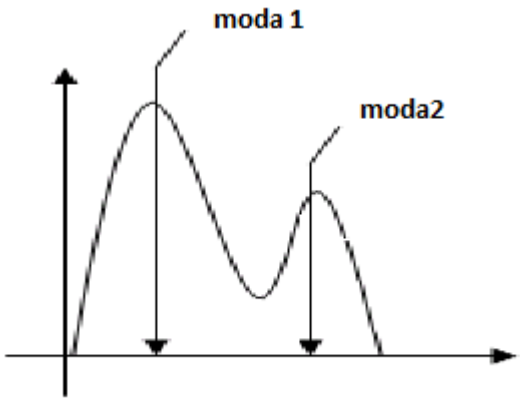
La forma más habitual de representación de distribuciones es en forma de campana (campaniforme), en la que uno de los valores es el más probable. Esta distribución ha sido extensamente estudiada y recibe también el nombre de **distribución "gaussiana" o distribución normal.**




Se observa en la gráfica como el valor más probable está situado en el centro de la distribución.

En otras ocasiones podemos encontrar distribuciones como la que se representa en la figura siguiente donde dos valores tienen la característica de una “moda”. A estas distribuciones se les denomina “bimodal” o “polimodal”.

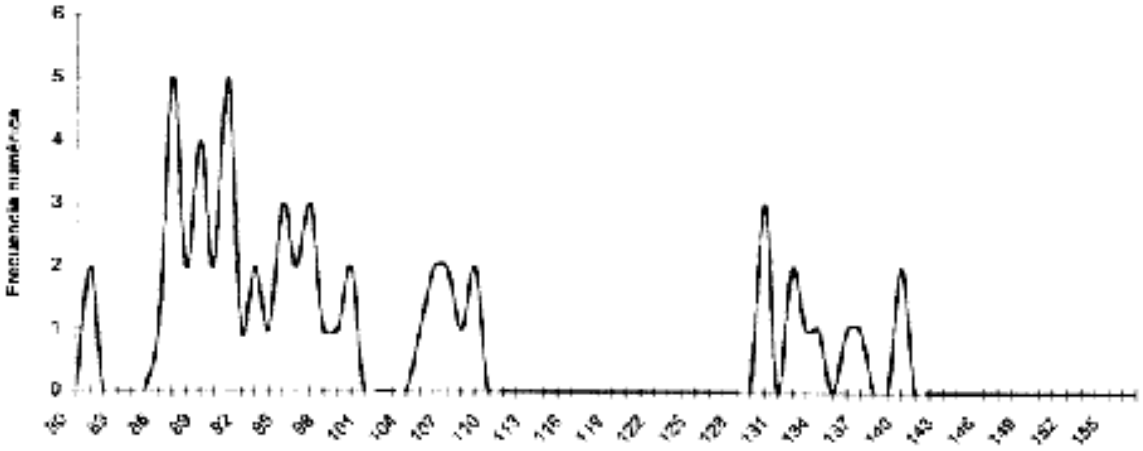



distribución bi-modal

En esta distribución hay dos valores que tienen características de moda. Uno de ellos tiene las características de moda en sentido estricto, pues es el que tiene la frecuencia más alta. Ahora bien, el otro, a pesar de tener una frecuencia más baja presenta, respecto de los datos que están a su alrededor, características de moda local.

**Ejemplos:**

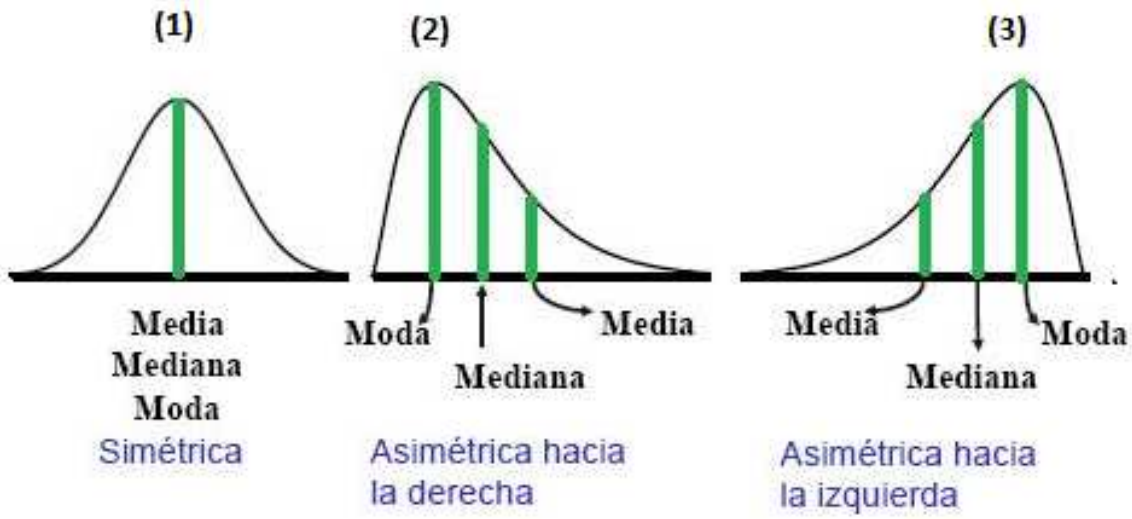
- Es posible una distribución bi-modal cuando estudiamos las notas de los alumnos en un examen, si éstos vienen de dos procedencias y niveles diferentes. En este caso el análisis de la distribución nos mostraría dos sub-poblaciones diferenciadas.
- Si pesamos una misma muestra con dos balanzas diferentes que no hayan sido correctamente calibradas y verificadas.



Ejemplo de distribución polimodal

## Distribuciones según su simetría:

Para una distribución habitual, de forma campaniforme, la simetría está relacionada con la aparición de "colas" desiguales a cada lado de la curva. Genéricamente podríamos establecer tres tipos de forma.




En la representación anterior recordemos lo siguiente sobre los valores de centralización:

- La moda corresponde al punto más elevado de la curva (mayor frecuencia).
- El valor medio está desplazado hacia la zona donde la cola es predominante.
- La mediana está situada sobre la vertical que divide la curva en dos áreas del mismo valor.

Así:

**(1) Distribución simétrica:**

Coinciden sobre el mismo eje vertical, los parámetros básicos de centralización.

moda = mediana = valor medio.

**(2) Distribución asimétrica hacia la derecha:**

También se denomina distribución con asimetría positiva o en forma de "L". Se cumple que:

moda < mediana < valor medio

**(3) Distribución asimétrica hacia la izquierda:**

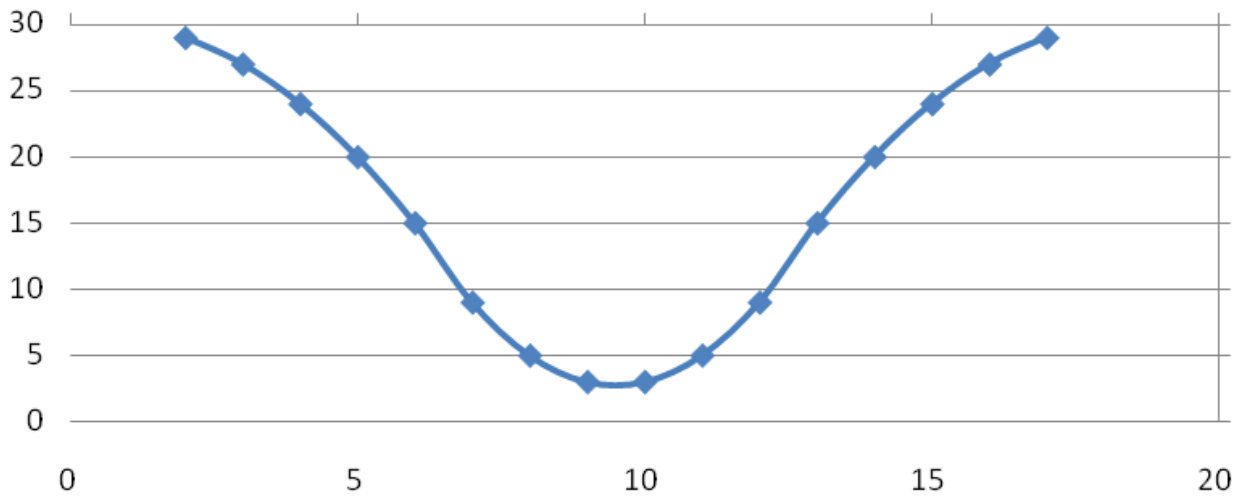
También se denomina distribución con asimetría negativa o en forma de "J". Se cumple que:

valor medio < mediana < moda

La elección del parámetro de centralización que nos de información sobre la distribución dependerá de diversos factores y, por supuesto, de su simetría.

En las distribuciones simétricas se toma como valor representativo el valor medio. En las distribuciones asimétricas puede ser más realista considerar la mediana como parámetro más representativo.

En otros casos como el de la figura siguiente, distribución en forma de "U" ninguno de los parámetros de centralización realmente funciona bien.




Podemos medir la asimetría de las distribuciones relacionando las posiciones del valor medio y de la moda.

Se define el **"coeficiente de asimetría" (A)**, al valor obtenido a partir de la siguiente expresión:

A = (valor medio – moda) / desviación estándar

Es decir,

$$A = \frac{(\bar{x} - \text{mod})}{s}$$

Con esta fórmula observaremos que su signo se corresponde con la calificación de asimetría positiva o negativa de las distribuciones anteriores.

## Distribuciones según su amplitud:

Al aumentar el número de datos experimentales, habitualmente se observa como las distribuciones tienden a la normalidad.

No hay un valor límite a partir del cual podamos afirmar que la distribución es más o menos normal. A efectos prácticos se consideran los siguientes casos:

**N < 30:** es el caso más frecuente cuando trabajamos con resultados del laboratorio, ya que difícilmente se realizarán más ensayos de una muestra. A mayor valor de N, mayor acercamiento a la normalidad. A estas distribuciones se les denomina *"t de Student"* y tienen un tratamiento matemático diferente a los de las distribuciones normales.

**N ≥ 30:** a partir de aquí podemos considerar que los datos conforman una distribución más o menos normal para poder aplicar todas las propiedades que se derivan de estas distribuciones.

**N → ∞:** en este caso se trabaja con muchos datos, centenares o miles de datos. En teoría sería la curva normal que estudiaremos a continuación.

# 2. LA CURVA NORMAL DE ERRORES.

## 2.1. Introducción.

La distribución normal de los datos es habitual cuando se estudia una gran diversidad de variables. Esto hace que el estudio de las distribuciones normales sea muy importante en disciplinas tan diversas como la química, medicina, sociología,…

Veamos algunos ejemplos de variables que siguen una distribución normal:

- Morfológicas: dimensiones, alturas, pesos… (de individuos de una misma raza).
- Fisiológicas: nivel de azúcar en sangre para una población.
- Psicológicas: coeficiente intelectual.
- Físicas: distribución de las masas moleculares de un polímero sintético.
- Tecnológicas: vida media de lámparas, resistencia a la rotura de piezas…
- Químicas: concentración de un analito en muestras de fabricación.

En los laboratorios de ensayos la forma en que aparecen los datos es también la distribución normal. Esto es debido a dos factores independientes:

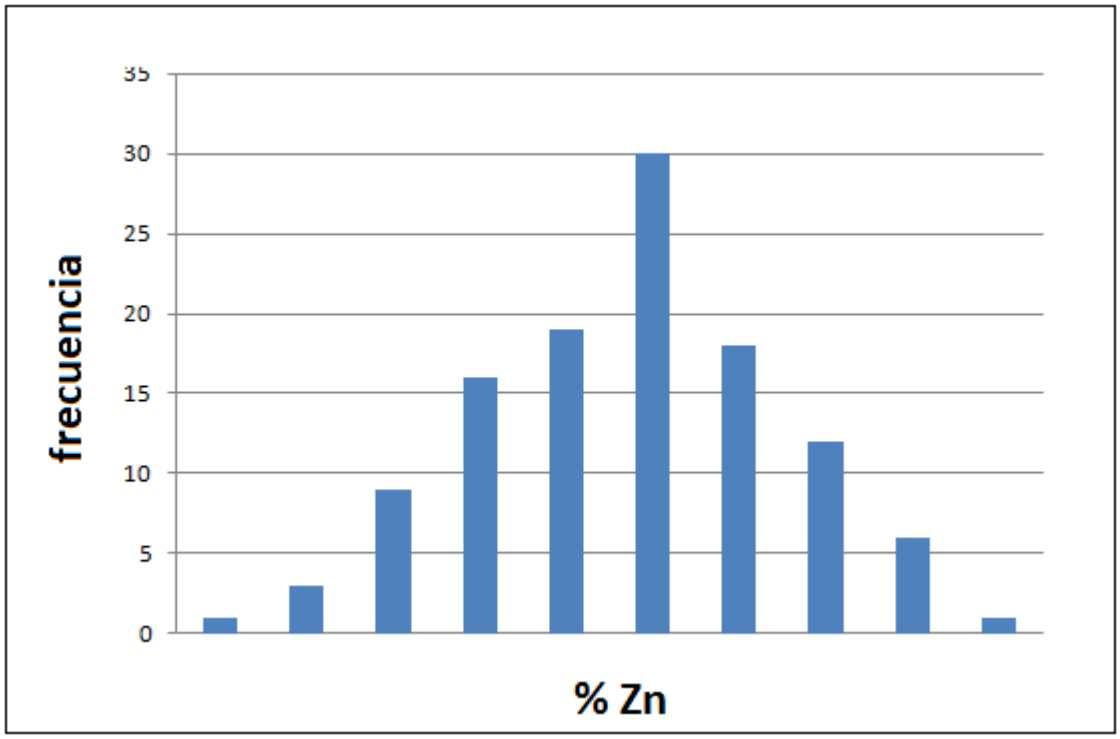
- La existencia de mayor probabilidad para valores situados en el centro de la distribución, que hace que sea cada vez menos probable la obtención de valores alejados del valor medio.
- La existencia de errores aleatorios asociados a toda medida experimental que condicionará la agrupación de los datos alrededor del valor central.

**Ejemplo:**

Se han realizado 115 medidas correspondientes a la determinación del porcentaje de Zn presente en una aleación. Los datos tabulados son los siguientes:

| Frecuencia | % Zn |
|---|---|
| 1 | 2,01 – 2,10 |
| 3 | 2,11 – 2,20 |
| 9 | 2,21 – 2,30 |
| 16 | 2,31 – 2,40 |
| 19 | 2,41 – 2,50 |
| 30 | 2,51 – 2,60 |
| 18 | 2,61 – 2,70 |
| 12 | 2,71 – 2,80 |
| 6 | 2,81 – 2,90 |
| 1 | 2,91 – 3,00 |

Y el histograma correspondiente:




**Respuesta:**

Observando solo la tabla no es fácil imaginarse como están distribuidos los datos.

Se puede observar mejor la distribución realizando una representación gráfica.

Se observa como la distribución se acerca a la distribución normal o de Gauss (forma de campana).

Para poder tener una mejor representación se podrían utilizar intervalos más reducidos de % Zn, pero esto supondría incrementar el tiempo de trabajo de los datos.

## 2.2. Propiedades de las distribuciones normales.

Matemáticamente, las variables normales son cuantitativas, continuas y siguen la distribución normal o ecuación de *Laplace-Gauss*. Ésta se caracteriza porque los valores centrales de la variable tienen las frecuencias más elevadas y, a medida que nos alejamos hacia los extremos, la frecuencia disminuye progresivamente de manera simétrica.

El estudio y análisis de las funciones normales muestran que éstas dependen únicamente de dos parámetros:

- El **valor medio** de la distribución: "$\bar{x}$"
- La **desviación estándar**: "s"

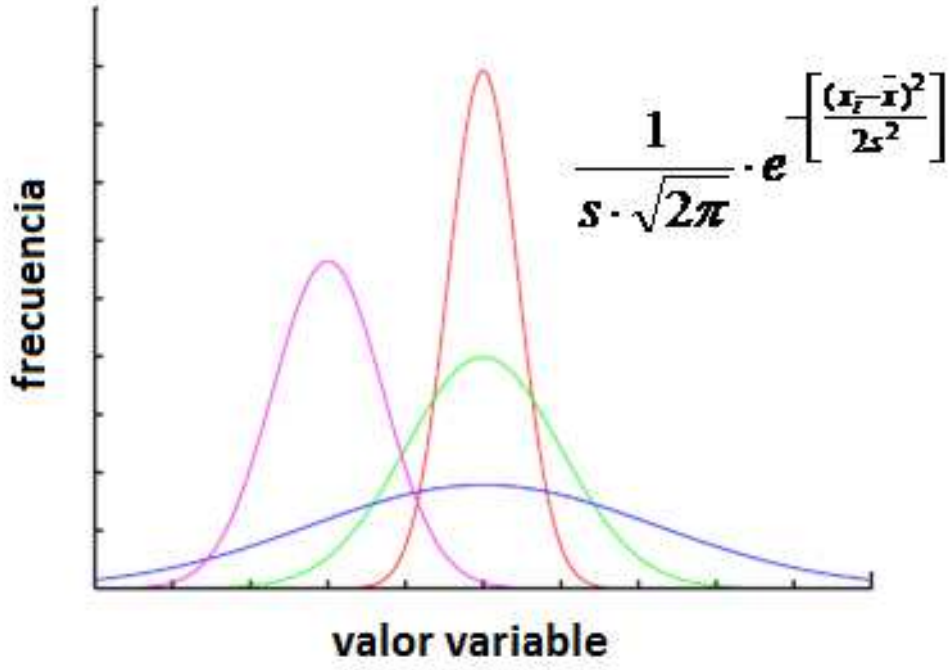
Así, la ecuación de la distribución normal en función de estos dos parámetros será:

$$f(x) = \frac{1}{s \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left[\frac{(x_i - \bar{x})^2}{2s^2}\right]}$$

Donde, f(x) = frecuencia con la que aparece cada valor de ($x_i$ - $\bar{x}$).

Además:

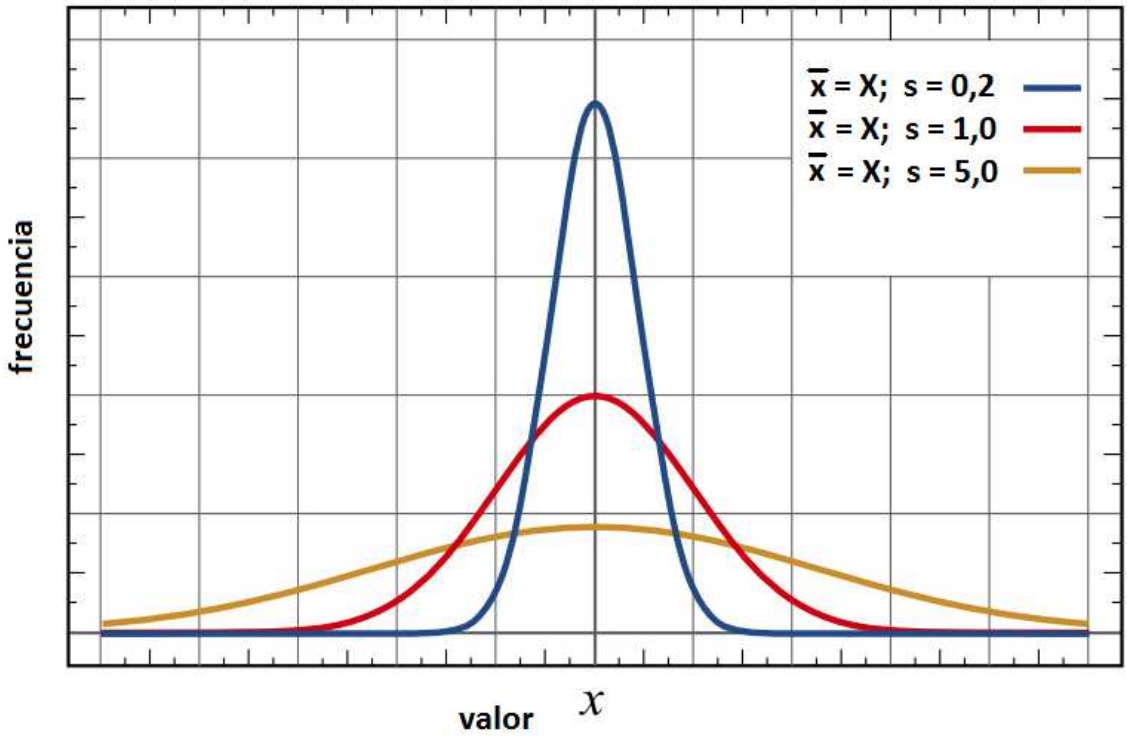
- Usualmente, ya que la distribución depende solo de "$\bar{x}$" y de "s", la función se expresa como N ($\bar{x}$ , s).
- Así se pueden obtener infinitas posibles distribuciones normales combinando los valores de "$\bar{x}$" y "s".



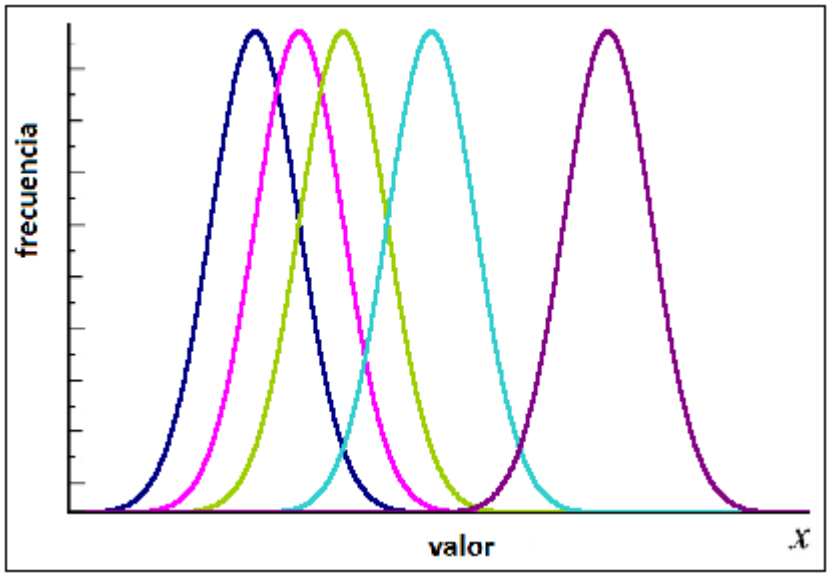

Todas las distribuciones representadas son distribuciones normales donde cambian los valores de "$\bar{x}$" y "s".

Lo más interesante de estas distribuciones es que independientemente de los valores particulares para "$\bar{x}$" y "s" para una determinada distribución se cumplen toda una serie de propiedades que se resumen a continuación en **seis** aspectos:

**(1)** El valor medio "$\bar{x}$" determina el centro de la distribución, la situación del máximo. En cambio la desviación estándar "s" determina como es de "puntiaguda" la curva, y si se quiere, como es su grado de "aplanamiento"

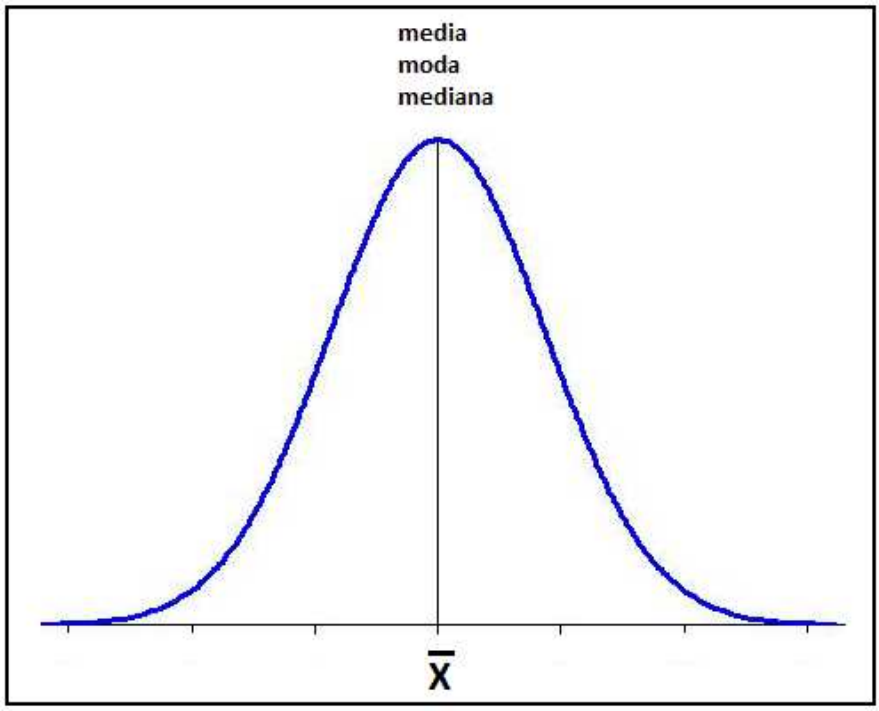



En la gráfica anterior se observa como para el mismo valor medio "$\bar{x}$" y distinto valor de "s" se obtienen curvas más o menos "aplanadas".

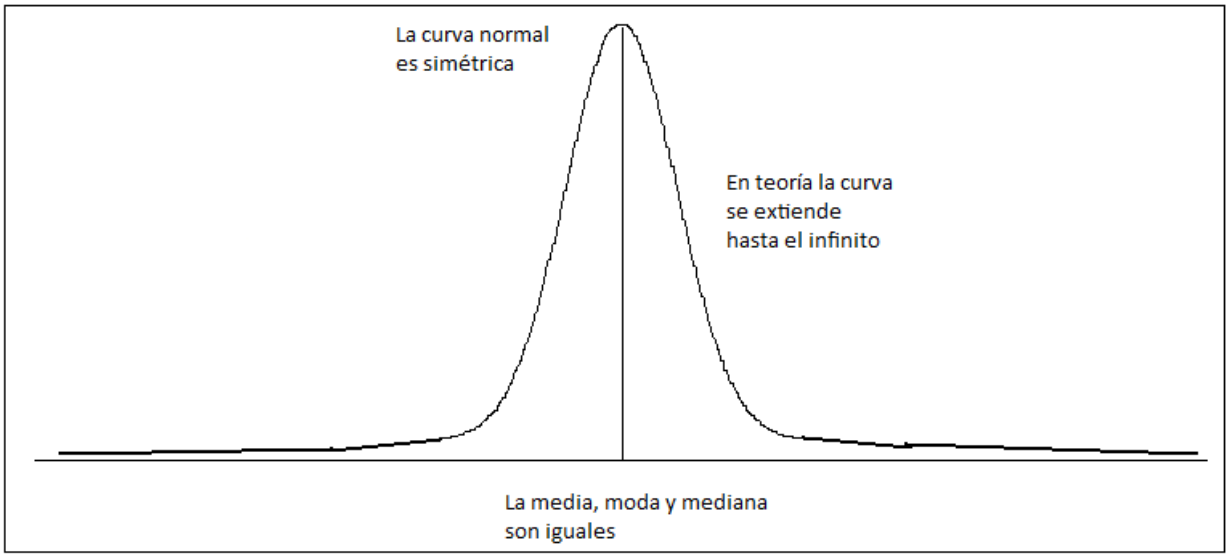



En la gráfica anterior se observan gráficas de distribuciones normales con distinto valor medio "$\bar{x}$" y el mismo valor de desviación estándar "s".

**(2)** La curva es simétrica respecto a un eje vertical que pasa por el único máximo que presenta. Este máximo corresponde simultáneamente al valor medio, la moda y la mediana.

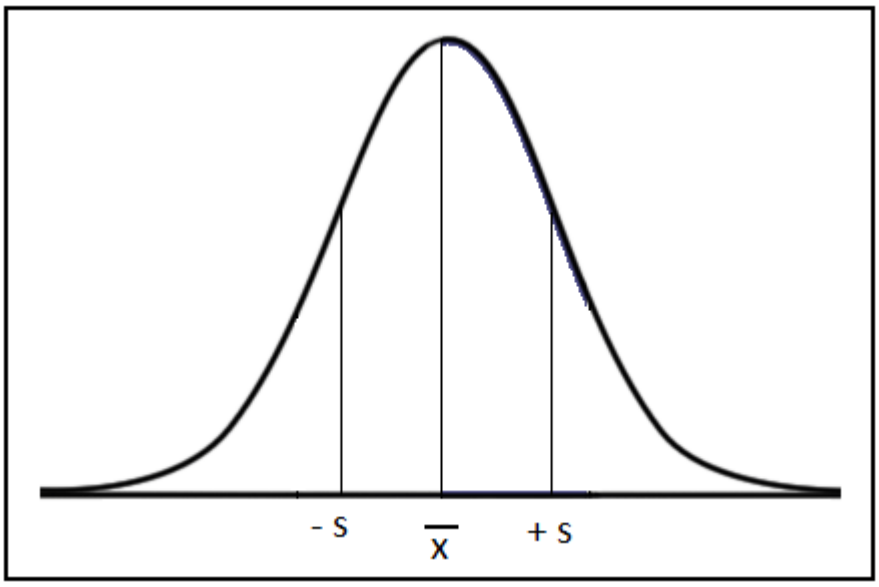



**(3)** La curva es asintótica respecto al eje de abcisas. Por pequeña que sea la probabilidad de aparición de un determinado valor alejado del valor central, en teoría y matemáticamente, ésta siempre será distinta de cero.



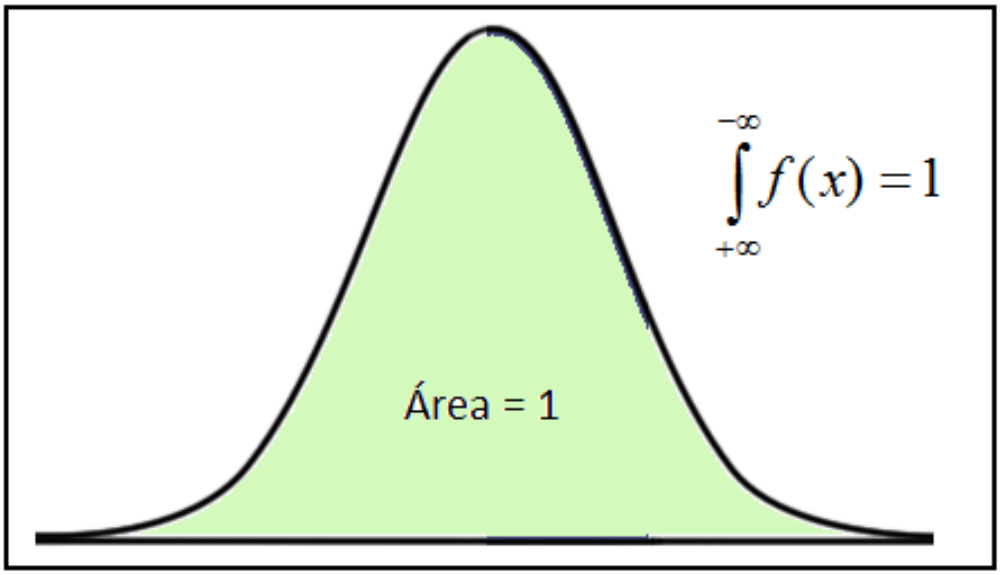
**(4)** La curva tiene dos puntos de inflexión. Estos puntos de inflexión coinciden gráficamente en el lugar donde la curva cambia de ser cóncava a convexa.

Podemos determinar el valor de la desviación estándar "s" si medimos la distancia entre el valor medio y cualquiera de los puntos de inflexión. Son los valores "+ s" y "- s".




**(5)** El área incluida bajo la "campana" normal vale la unidad.

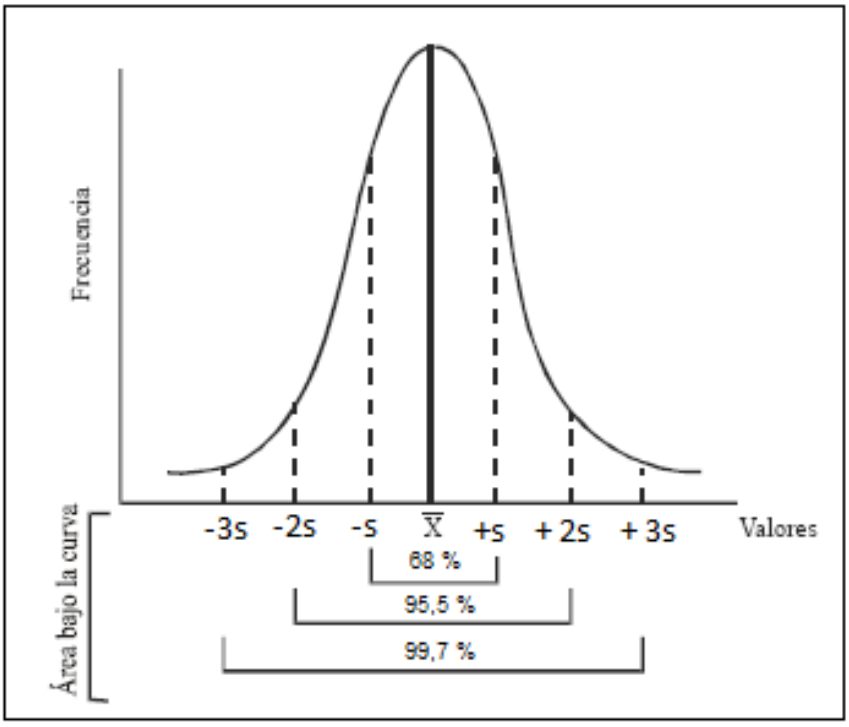
$$\int_{+\infty}^{-\infty} f(x) = 1$$




El área bajo la curva tiene el valor de 1 porque la fórmula matemática incorpora un factor que permite esta simplificación.

**(6)** Escalando el eje de abcisas en unidades de "s" se observa que los siguientes intervalos incorporan un porcentaje determinado del área de la curva.

| Intervalo | % Área total | Intervalo | % Área total |
|---|---|---|---|
| $[\bar{x} \pm 0{,}1\ s]$ | 7,96 | $[\bar{x} \pm 2{,}5\ s]$ | 98,76 |
| $[\bar{x} \pm 0{,}5\ s]$ | 38,30 | $[\bar{x} \pm 2{,}576\ s]$ | 99,00 |
| $[\bar{x} \pm\ s]$ | 68,27 | $[\bar{x} \pm 3\ s]$ | 99,73 |
| $[\bar{x} \pm 1{,}5\ s]$ | 86,64 | $[\bar{x} \pm 3{,}290\ s]$ | 99,90 |
| $[\bar{x} \pm 1{,}96\ s]$ | 95,00 | $[\bar{x} \pm 3{,}5\ s]$ | 99,95 |
| $[\bar{x} \pm 2\ s]$ | 95,45 | $[\bar{x} \pm 4\ s]$ | 99,99 |




En la gráfica anterior podemos ver las diferentes secciones en función de los intervalos más importantes. Los valores + s y –s nos marcan los puntos de inflexión, tal como se ha comentado en el aspecto (4).

Es importante memorizar los intervalos más importantes:

- **[-s; +s]** …….. corresponde aproximadamente a **2/3** de los datos.
- **[-2s; +2s]** …… corresponde aproximadamente al **95,5 %** de los datos.
- **[-3s; +3s]** …… corresponde aproximadamente al **100 %** de los datos.

Así, si decimos que un intervalo contiene el 70 % del área de la curva es equivalente a decir que de cada 100 medidas, 70 están incluidas en ese intervalo. También podríamos decir que la probabilidad de que una determinada medida esté incluida en ese intervalo es del 70 %.

La relación entre probabilidad de unos datos y el porcentaje de área de la curva será de gran utilidad en la resolución de problemas, como se podrá ver más adelante.

## 2.3. Cálculos en la curva normal.

A partir de los valores de porcentaje sobre el área, expresados anteriormente, pueden efectuarse muchos cálculos. Vemos seguidamente un ejemplo que se resolverá de forma aproximada.

**Ejemplo:**

A partir de los porcentajes indicados en las propiedades de la curva normal, determinar la probabilidad de que una determinada medida esté situada en los intervalos indicados a continuación:

a) $[\bar{x} - s, \bar{x}]$

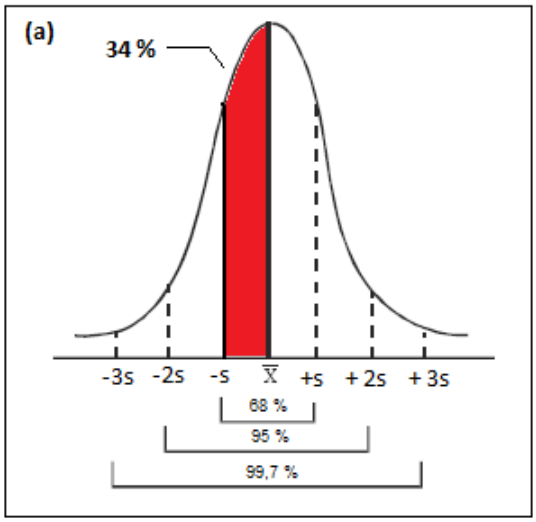
b) $[\bar{x} - 2s, \bar{x} - s]$

c) $[\bar{x} - 3s, \bar{x} - 2s]$

d) $[\bar{x} + 3s, +\infty]$

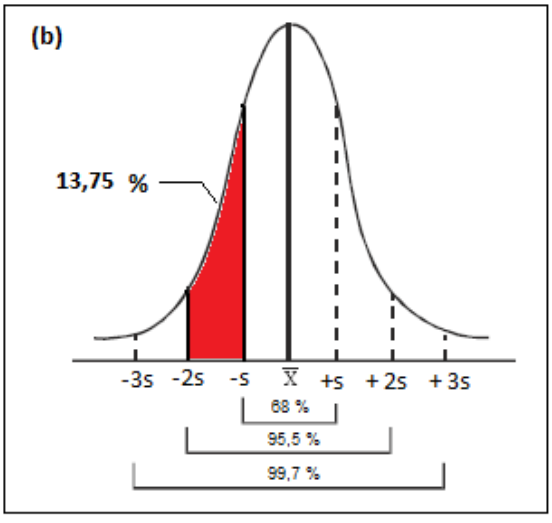
**Solución:**

**a)** Como $[\bar{x} \pm s]$ corresponde aproximadamente al 68 % y la función es simétrica, podemos establecer que: $[\bar{x} - s, \bar{x}] = [\bar{x}, \bar{x} + s] = 68 / 2 =$ **34 %**



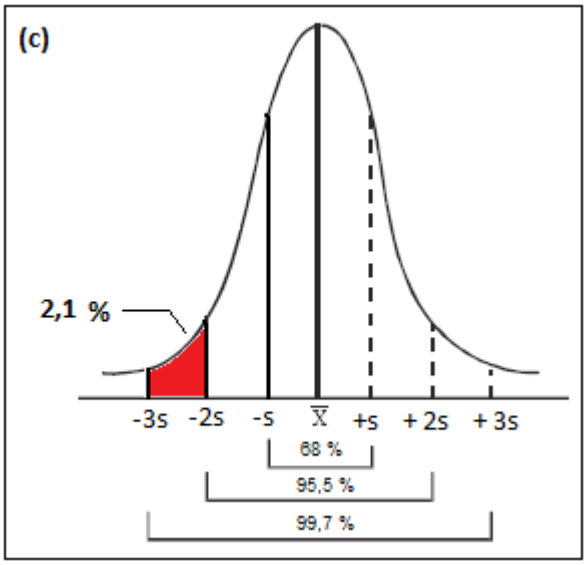

**b)** Como $[\bar{x} \pm 2s]$ corresponde aproximadamente al 95,5 %. Podemos establecer que:

$[\bar{x} - 2s, \bar{x} - s] = [\bar{x} + s, \bar{x} + 2s] = (95,5 - 68) / 2 = 31,5 / 2 =$ **13,75 %**



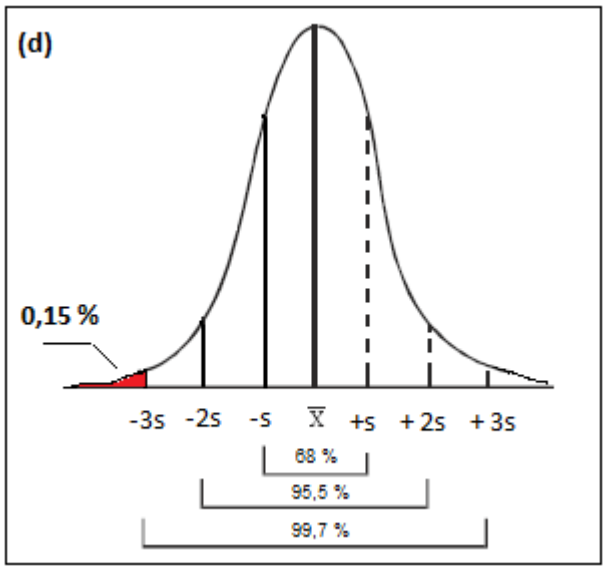
**c)** Como [$\bar{x}$ ± 3s] corresponde aproximadamente al 99,7 %. Podemos establecer que:

[$\bar{x}$ - 3s, $\bar{x}$ - 2s] = [$\bar{x}$ + 2s, $\bar{x}$ + 3s] = (99,7 – 95,5) / 2 = 4,5 / 2 = **2,1 %.**




**a)** Finalmente, como todo el área de la curva normal corresponde al 100 %.

[- ∞, $\bar{x}$ - 3s] = [$\bar{x}$ + 3s, + ∞ ] = (100 - 99,7) / 2 = 0,3 / 2 = **0,15 %**



## 2.4. Tipificación de la curva normal.

Para poder realizar cálculos de áreas comprendidas entre cualquier intervalo de valores de la variable, nos lleva a utilizar la **tipificación**.

La tipificación consiste en modelizar una determinada distribución normal para hacerla comparable a otra distribución normal de referencia. Esta transformación se consigue mediante un simple cambio de variable.

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s}$$

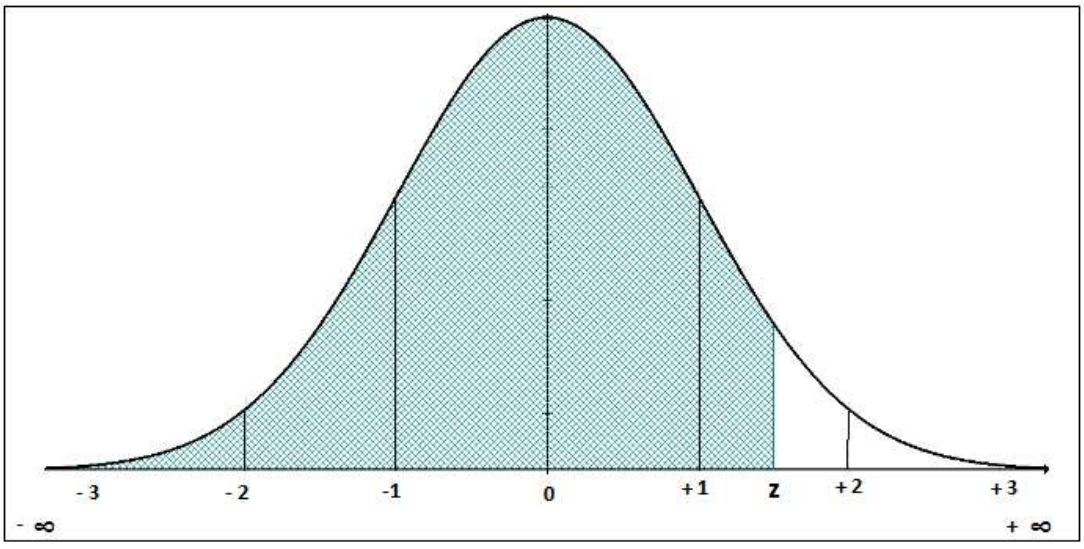
Tipificar consiste, simplemente, en escalar los valores respecto a la desviación estándar, s. De esta forma, la función original N ( $\bar{x}$ , s) pasa a ser una función normalizada N (z) que depende de una sola variable, lo que permite disponer de una tabla con todas las situaciones posibles.

Este cambio de variable lo que hace es situar el centro de la nueva distribución con el valor "0" y escalar el eje de abcisas (x) en unidades de "z".

La simplificación efectuada puede observarse en la tabla siguiente:

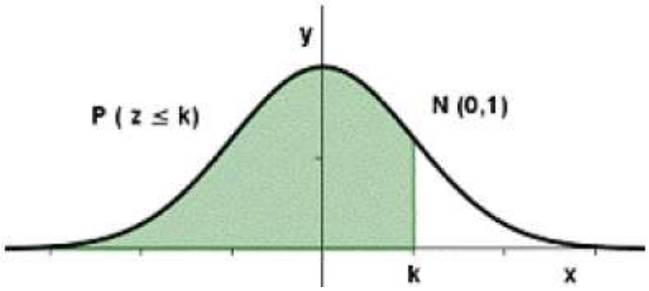
| Valor inicial | Valor tipificado z |
|---|---|
| $\bar{x}$ - 3s | - 3 |
| $\bar{x}$ - 2s | - 2 |
| $\bar{x}$ - s | - 1 |
| $\bar{x}$ | 0 |
| $\bar{x}$ + s | 1 |
| $\bar{x}$ + 2s | 2 |
| $\bar{x}$ + 3s | 3 |

Las gráficas normales se convertirán todas en una igual a la mostrada en el modelo siguiente:



Como se observa en la el gráfico anterior se ha representado el área desde el valor [-∞, z] sombreada y este es el valor que suele estar representado en la mayoría de las tablas.

Los valores de la tabla siguiente presentan siempre valores siempre positivos de "z". (*)




| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7652 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8930 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9561 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9934 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9901 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9954 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |

(*) Al final del tema anexo con tablas completas.

**Ejemplo:**

La puntuación de una prueba de química correspondiente a una muestra de 20 000 alumnos para acceso a la universidad se distribuye normalmente según N (6,5; 1). Encontrar el número de alumnos que se encuentran en los siguientes intervalos:

**a)** > 6,5

**b)** Entre 5,5 y 7,5

**c)** Entre 5,5 y 6,5

**d)** < 4,5

**e)** > 9,5

**f)** Entre 7,5 y 8,5

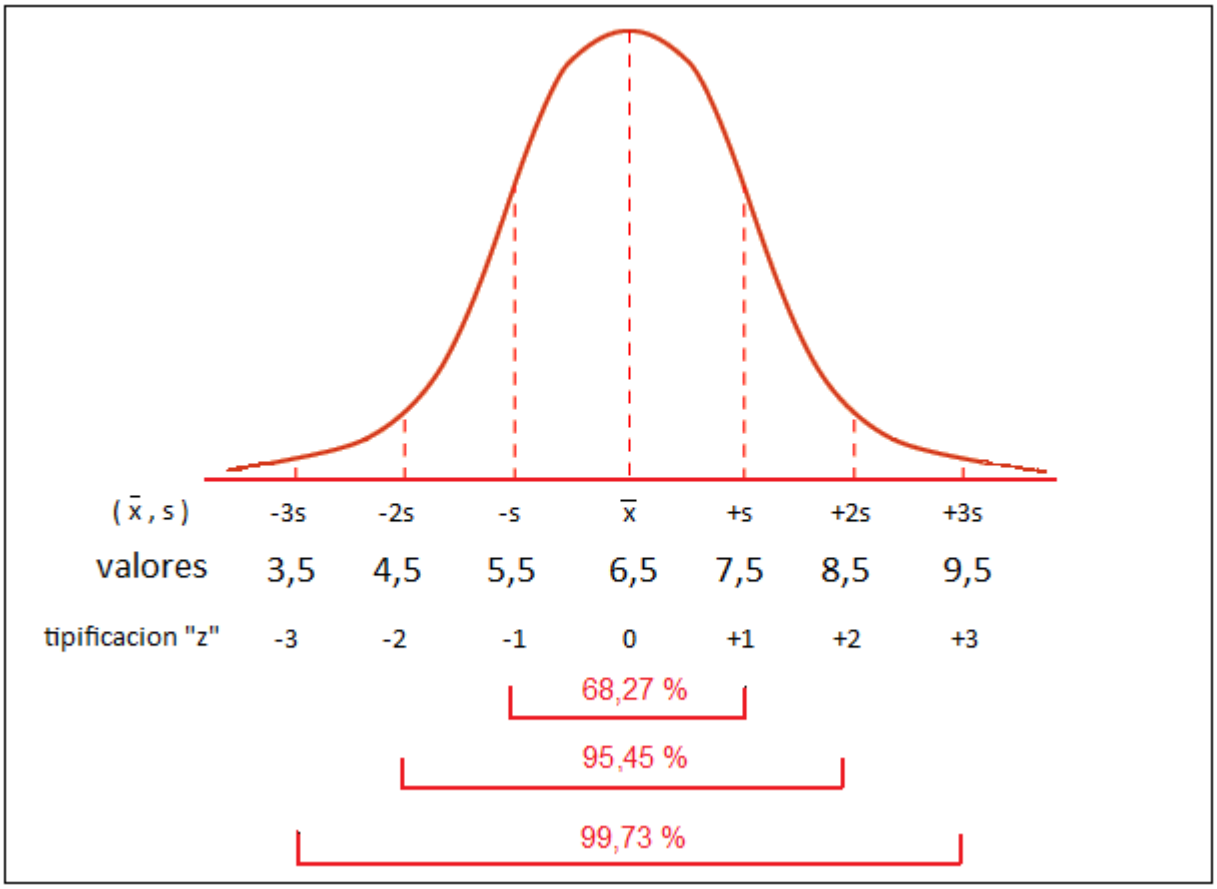
**Solución:**

El cálculo de cada una de estas sub-poblaciones incluirá dos etapas:

- Cálculo del porcentaje de alumnos incluidos en cada intervalo.
- Cálculo del número de alumnos

$$N_i = \frac{20000 \cdot porcentaje}{100}$$

En este problema como los valores que constituyen el intervalo distan 1, 2 o 3 unidades de s respecto al valor medio, es muy fácil prever la amplitud de los intervalos a partir de las propiedades expuestas en la curva normal.



Resolvemos el problema con ayuda de la gráfica y la tabla siguiente:

| **Apartado ejercicio** | | **Tipificación** $z=\frac{(x_i-\bar{x})}{s}$ | **%** | $N_i=\frac{20000\cdot porcentaje}{100}$ |
|---|---|---|---|---|
| **a)** | > 6,5 | [0 , +∞] | 50,00 | 10000 |
| **b)** | entre 5,5 y 7,5 | [-1 , +1] | 68,27 | 13654 |
| **c)** | entre 5,5 y 6,5 | [-1 , 0] | 34,13 | 6827 |
| **d)** | < 4,5 | [-∞ , -2] | 2,28 | 455 |
| **e)** | > 9,5 | [+3 , +∞] | 0,13 | 26 |
| **f)** | entre 7,5 y 8,5 | [+1 , +2] | 13,59 | 2718 |

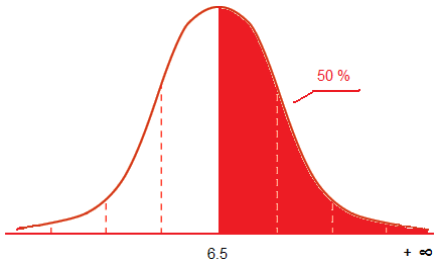
**a)** Hacemos la tipificación: $z=\frac{(x_i-\bar{x})}{s}$ ; para el valor 6,5; $z=\frac{(6{,}5-6{,}5)}{1}=0$

Podemos ver en la tabla como para el valor de z = 0, el porcentaje es de 50,00 %.

La tabla es simétrica luego P (z < 0) = P (z > 0). Leído la probabilidad para "z" menor que "0" es igual a la probabilidad de "z" mayor que "0".

Solo nos queda ahora calcular el número de alumnos que obtienen más de un 6,5.

$$N_i=\frac{20000\cdot porcentaje}{100}=\frac{20000\cdot 50{,}00}{100}=10000$$




**b)** Tipificamos: $z=\frac{(x_i-\bar{x})}{s}$ ; para 5,5; $z=\frac{(5{,}5-6{,}5)}{1}=-1$; para 7,5; $z=\frac{(7{,}5-6{,}5)}{1}=+1$

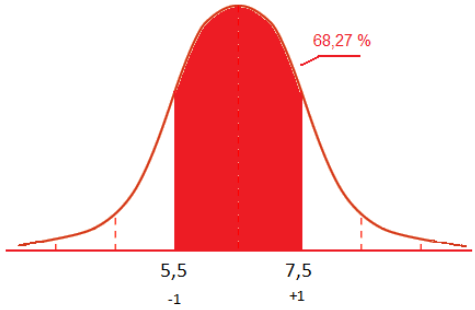
Podemos ver en el gráfico como el porcentaje para z = +1; es del 84,13 %.

Como la tabla es simétrica y nos piden los valores entre – 1 y +1;

Tendremos que: P (-1 ≤ z ≤ +1) = 84,13 - [100 – P (z ≤ +1)] = 84,13 – (100 – 84,13) = 68,27 . La probabilidad de que el valor "z" sea menor o igual a "-2" es la misma que 100 % menos la probabilidad de "z" igual a "+2".

Solo nos queda ahora calcular el número de alumnos que tienen entre 5,5 y 7,5.

$$N_i=\frac{20000\cdot porcentaje}{100}=\frac{20000\cdot 68{,}27}{100}=13654$$

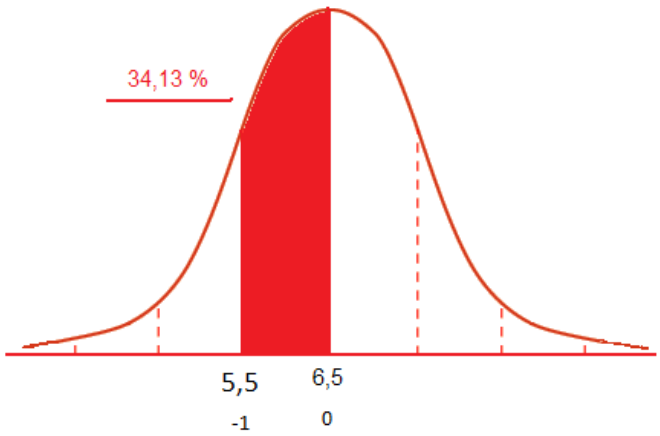


**c)** Tipificamos: $z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s}$ ; para 5,5; $z = \frac{(5{,}5 - 6{,}5)}{1} = -1$; para 6,5; $z = \frac{(6{,}5 - 6{,}5)}{1} = 0$

Podemos ver en el gráfico como el porcentaje es del 68,27 % / 2 = 34,13 %.

Solo nos queda ahora calcular el número de alumnos que tienen entre 5,5 y 6,5.

$$N_i = \frac{20000 \cdot porcentaje}{100} = \frac{20000 \cdot 34{,}13}{100} = 6827 \ alumnos$$




**d)** Hacemos la tipificación: $z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s}$ ; para el valor 4,5; $z = \frac{(4{,}5 - 6{,}5)}{1} = -2$

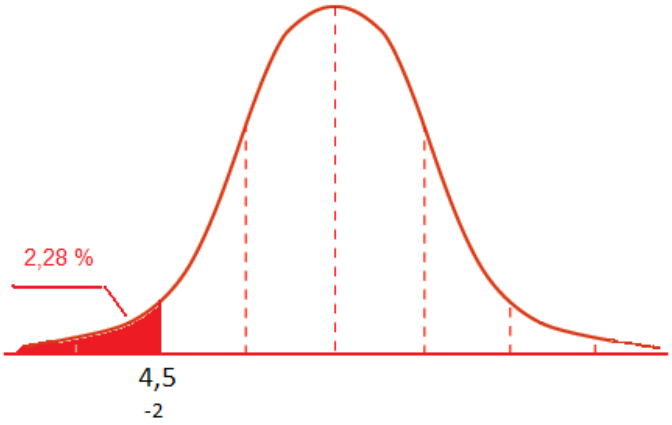
Podemos ver en la tabla como para el valor de z = 2, el porcentaje es de 97,72 %.

La tabla es simétrica luego P (z < -2) = P (z > + 2).

Así: P (z ≤ -2 ) = 100 – P (z ≥ +2) = 100 – 97,72 = 2,28 %

Solo nos queda ahora calcular el número de alumnos que tienen menos de 4,5.

$$N_i = \frac{20000 \cdot porcentaje}{100} = \frac{20000 \cdot 2{,}28}{100} = 455 \ alumnos$$



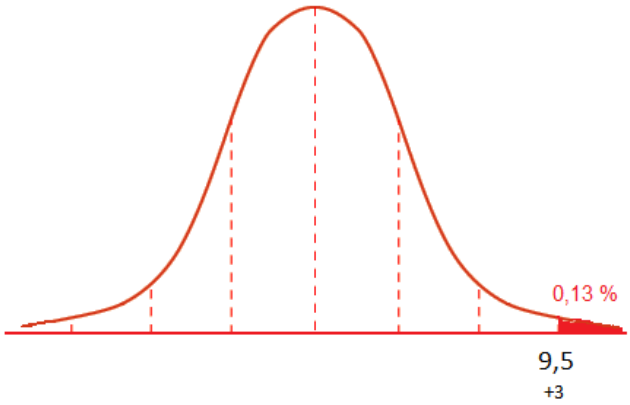
**e)** Tipificamos: $z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s}$; para 9,5; $z = \frac{(9{,}5 - 6{,}5)}{1} = -3$;

Podemos ver en la tabla como para el valor de z = 3, el porcentaje es de 99,87 %.

Así P (z > + 3 ) = 100 – 99,87 = 0,13 %

Solo nos queda ahora calcular el número de alumnos que tienen entre 5,5 y 6,5.

$$N_i = \frac{20000 \cdot porcentaje}{100} = \frac{20000 \cdot 0{,}13}{100} = 26 \ alumnos$$



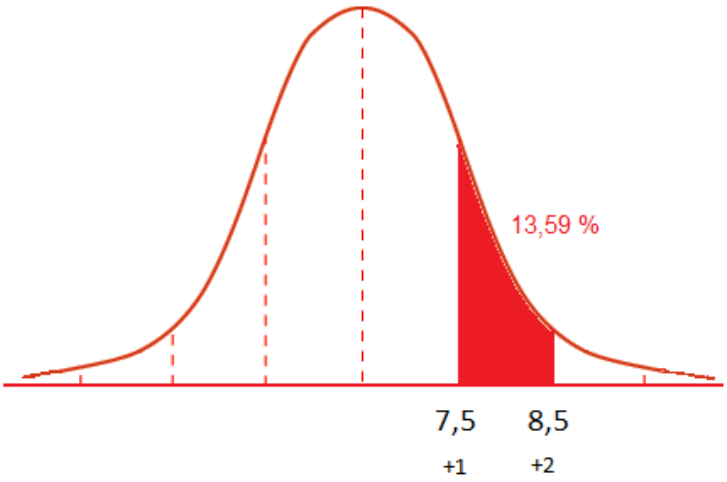

**f)** Tipificamos: $z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s}$; para el valor 7,5; $z = \frac{(7{,}5 - 6{,}5)}{1} = +1$; para 8,5; $z = \frac{(8{,}5 - 6{,}5)}{1} = +2$

En la tabla para z = +1; P = 84,13 %; y para z = +2, P = 97,72 %.

La probabilidad entre (+1 , +2) será por tanto: P ( z ≤ +3 ) – P ( z ≤ +2) = 97,72 – 84,13 = 13,59 %.

Solo nos queda ahora calcular el número de alumnos que tienen entre +1 y +2.

$$N_i = \frac{20000 \cdot porcentaje}{100} = \frac{20000 \cdot 13{,}59}{100} = 2718 \ alumnos$$



## 2.5. Aspectos importantes en el uso de valores tipificados.

Una vez visto el ejercicio que nos ha servido como ejemplo, podemos entender mejor los aspectos que se deben tener en cuenta en este tipo de cálculos con distribuciones normales tipificadas.

En el uso de las distribuciones tipificadas empleando valores de la tabla anterior podemos observar los siguientes aspectos.

- El área total de la curva vale la unidad (100 %), es decir, podemos efectuar el cálculo del área complementaria cuando ésta nos sea conveniente. La suma de un área y su complementaria siempre vale la unidad (100 %).
- La curva es simétrica y es suficiente disponer de los datos de uno de los lados de la gráfica para efectuar un cálculo en el otro lado.

Aunque pueda parecer compleja la realización de este tipo de ejercicios es de mucha utilidad para conocer el comportamiento de la distribución y calcular los valores individuales o por intervalos a partir de series normalizadas o que se aproximan a ellas.

En este tipo de ejercicios nos encontraremos con una de tres situaciones posibles:

a) Partiendo de un valor "$x_i$" calcular el porcentaje de la población que está por encima o debajo de ese valor.

b) Partiendo de un determinado porcentaje, calcular el valor de "$x_i$".

c) Calcular el número de individuos (o porcentaje de ellos) incluidos en un determinado intervalo.

NOTA: con la tabla facilitada solo se pueden buscar valores de tipificación con dos decimales. Existen tablas con más decimales y con mayor precisión.

**Ejemplo:**

Para la resolución de este caso deberemos de utilizar la gráfica con los valores de "z" tipificados.

Calcular, a partir de la tabla, las áreas indicadas.

**a)** $P (z \leq 0,08)$

**b)** $P (z \leq 1,27)$

**c)** $P (z \geq 0,84)$

**d)** $P (z \leq -1,35)$

**e)** $P ( z \geq -1,41)$

**f)** $P (0,83 \leq z \leq 1,54)$

**g)** $P (-0,96 \leq z \leq 1,49)$

**h)** $P (-1,32 \leq z \leq -0,57)$

**i)** $P (-1,32 \leq z \leq 1,32)$

**Solución:**

**a)** Por lectura directa en la tabla para z = 0,08. P = **0,5319** (53,19 %).

**b)** Por lectura directa en la tabla para z = 1,27. P = **0,8980** (89,80 %).

**c)** En la tabla encontramos el valor de z ≤ 0,84. Buscamos z ≥ 0,84. Por lo que obtendremos el resultado así: P (z ≥ 0,84) = 1 – P (z ≤ 0,84) = 1 – 0,7996 = **0,2024** (20,24 %).

**d)** En la tabla podemos buscar el valor de z ≤ 1,35. Buscamos z ≤ -1,35, que al ser simétrica la curva será igual a 1 – P (z ≤ 1,35) = 1 – 0,9115 = **0,0885** (8,85 %).

**e)** Como la P (z ≥ - 1,41) = P (z ≤ 1,41) tendremos: **0,9287** (92,87 %).

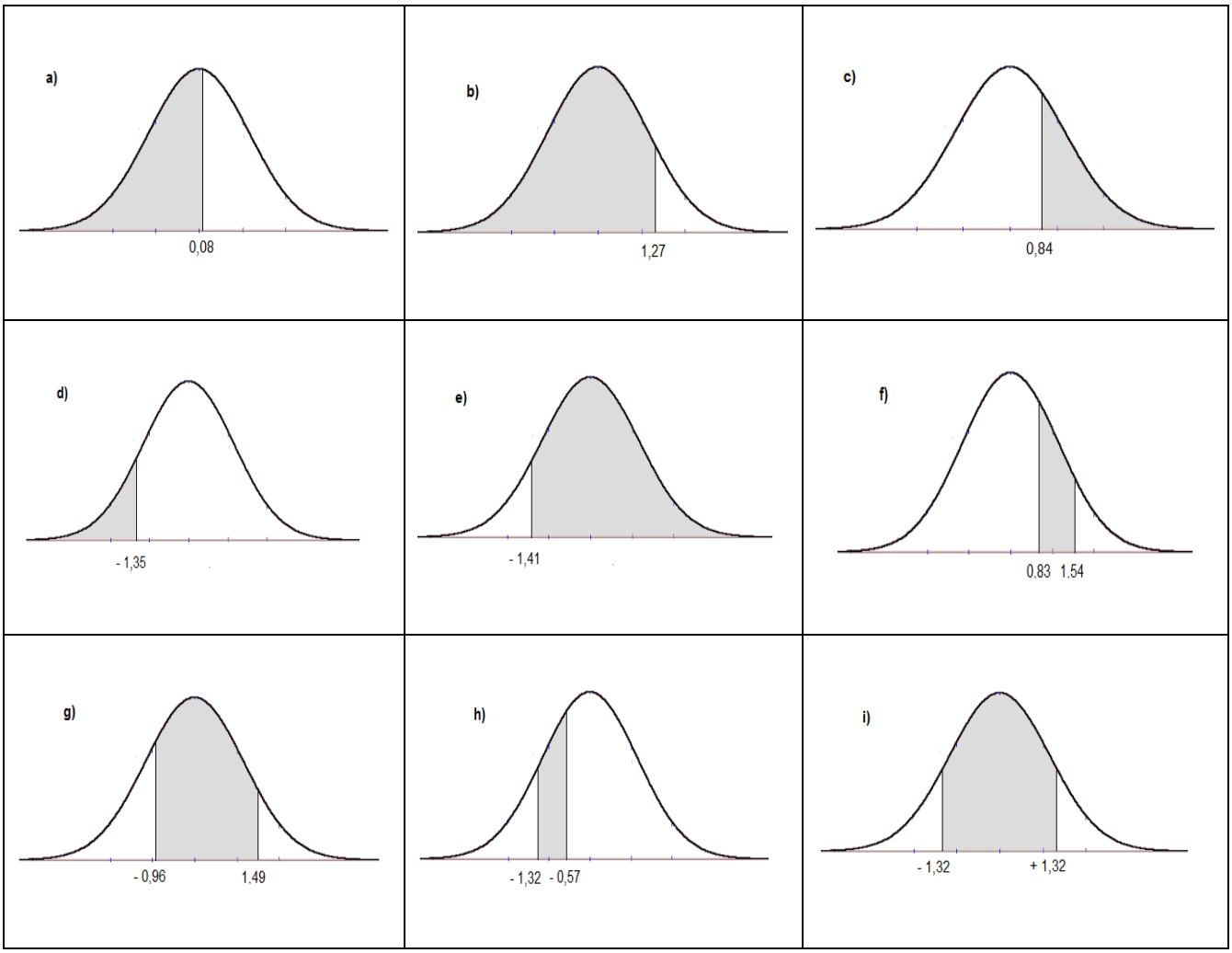
**f)** En este caso es igual a P (z ≤ 1,54) – P (z ≤ 0,83) = 0,9382 – 0,7967 = **0,1415** (14,15 %).

**g)** Como es igual a: P (z ≤ 1,49) – P (z ≤ -0,96) = P (z ≤ 1,49) – [1 - P (z ≤ 0,96)] =
= 0,9319 – (1 – 0,8315) = 0,9319 – 0,1685 = **0,7634** (76,34 %).

**h)** Como es igual a: P (-1,32 ≤ z ≤ -0,57) = P (0,57 ≤ z ≤ 1,32) = P ( z ≤ 1,32) – P (z ≤ 0,57) = 0,9066 – 0,7157 = **0,1909** (19,09 %).

**i)** Como la parte comprendida entre (-∞ , -1,32) es igual a la parte entre (+1,32 , +∞).
P (-1,32 ≤ z ≤ +1,32) = 1 – 2 [1 – P (z ≤ 1,32)] = 1 – 2 · (1 – 0,9066) = **0,8132** (81,32 %).

**Solución gráfica:**



# EJERCICIOS RESUELTOS

## EJERCICIO 1:

Un fabricante de bombillas deduce de su experiencia que el número de horas de funcionamiento de sus bombillas sigue una distribución normal. Tomada una muestra y midiendo el tiempo de vida media resulta ser de 60 días, con una desviación estándar de 16,26 días. N ($x_{med}$ , s) = N (60,00 ; 16,26)

¿Cuántas bombillas, expresadas en porcentaje, se pueden esperar que continúen funcionando después de 80 días?

**Solución ejercicio 1:**

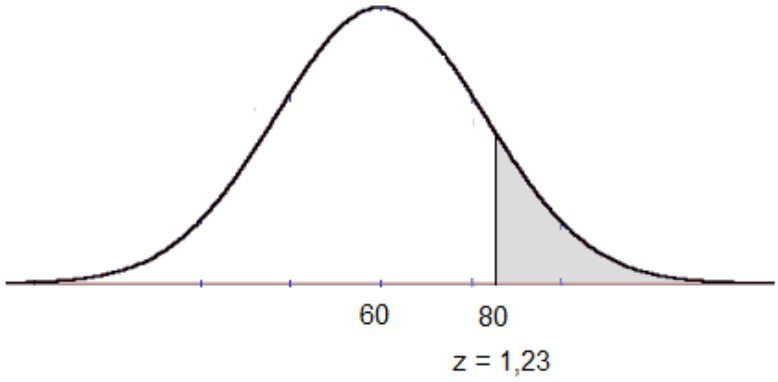
Tipificamos el valor de 80 días

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(80 - 60)}{16{,}26} = 1{,}23$$

Ahora acudimos a la tabla y observamos que para z = 1,23, el valor de la probabilidad P = 0,8907.

Como la probabilidad total vale la unidad. P (z ≥ 1,23) = 1 – P (z ≤ 1,23) = 1 – 0,8907 = 0,1093.

Por tanto tras 80 días de funcionamiento es probable que un **10,93 %** de las bombillas continúen en funcionamiento.




## EJERCICIO 2:

A partir de una muestra de 10 000 individuos ha sido determinado el contenido de un tóxico en sangre. El intervalo que incluye el 95 % de los datos, centrado respecto del valor medio, bien determinado por los límites 0,1380 y 0,1460 ppm. Se pide:

a) Encontrar el valor medio y la desviación estándar de la población.

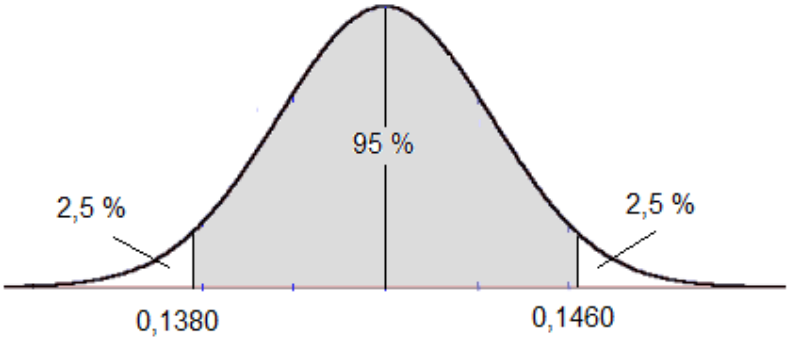
b) ¿Cuál es el intervalo centrado en el valor medio que incluye el 50 % de los datos?

c) ¿Qué porcentaje de individuos tiene un valor por encima de 0,1490?

d) Si consideramos que una determinada enfermedad afecta a 1 de cada 200 individuos con valores excesivamente alto del tóxico, ¿cuál será el valor que se puede considerar límite entre la población normal y la afectada por la enfermedad?

## Solución ejercicio 2:

**a)** Con los datos del problema tenemos lo representado en la gráfica:




Así el **valor medio será**: $\bar{x} = \frac{0{,}1380 + 0{,}1460}{2} = \frac{0{,}2840}{2} =$ **0,1420 ppm**

Para el cálculo de la desviación estándar utilizamos la fórmula de tipificación para cualquiera de los datos conocidos, pero sabiendo que para el valor de $x_i$ = 0,1460 su correspondiente valor de "z" será:

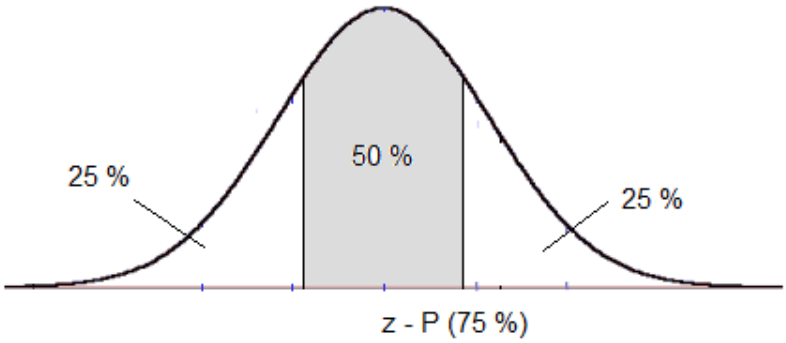
95 % + 2,5 % = 97,5 % → 0,9750 que es el dato que buscaremos en la tabla para encontrar "z".

Así para 0,9750 → z = 1,96.

Ahora con la fórmula de la tipificación buscamos la **desviación estándar**.

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} \Rightarrow s = \frac{(x_i - \bar{x})}{z} = \frac{(0{,}1460 - 0{,}1420)}{1{,}96} = 0{,}0020408... \approx \textbf{0,0020 ppm}$$

**b)** El intervalo centrado 50 %. Lo representamos gráficamente:




Buscamos el valor de z para el punto determinado en la tabla. P = 0,7500. Podemos considerar con bastante aproximación z = 0,675; ya que para z = 0,67; P = 0,7486 y para z = 0,68; P = 0,7517

Para este valor de z y operando con la fórmula de tipificación buscando $x_i$.

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} \Rightarrow x_i = z \cdot s + \bar{x} = 0{,}675 \cdot 0{,}0020 + 0{,}1420 = 0{,}14335 \rightarrow \textbf{0,1436 ppm}$$

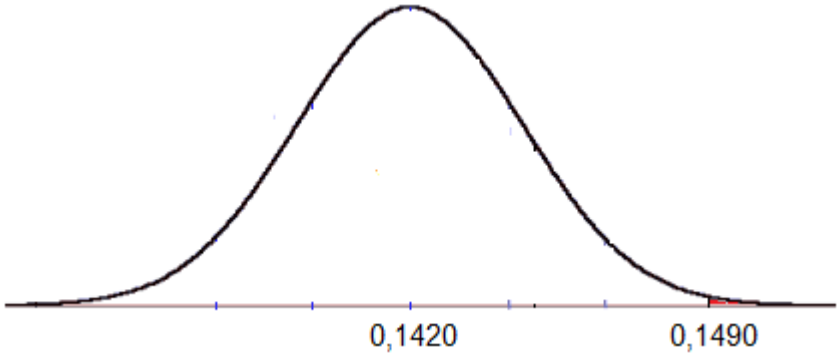
Como la curva es simétrica tendremos el otro valor:

0,1420 – (0,1436 – 0,1420) = **0,1404 ppm**

El **intervalo** será por tanto **(0,1404 ; 0,1436) ppm**

**c)** Individuos por encima de 0,1490.

Gráficamente:




Buscamos el valor de "z" para $x_i$ = 0,1490.

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(0{,}1490 - 0{,}1420)}{0{,}0020} = 3{,}5$$

Buscamos en la tabla el valor de probabilidad para z = 3,5; así P = 0,9998 (99,98 %).

Nosotros buscamos el valor por encima de 3,5 pues la tabla nos da el valor por debajo. Así tendremos que la probabilidad será: P (z ≥ 3,5) = 1 – P (z ≤ 3,5) = 1 – 0,9998 = **0,0002 (0,02 %)**.

Para una población de 10 000 (0,02 %) supone 2 individuos.

**d)** Enfermedad 1/200 individuos.

Buscamos la probabilidad para esta enfermedad: 1/200 = 0,005 (0,5 %).

Gráficamente:




Esta probabilidad supone que el 99,5 % de los individuos estarán sanos. Buscamos en la tabla el valor de ppm en sangra para el tóxico para este porcentaje (0,9950).

Así: P (0,9950) → z = 2,565 con bastante aproximación.

Para este valor de z y operando con la fórmula de tipificación buscando $x_i$.

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} \Rightarrow x_i = z \cdot s + \bar{x} = 2{,}565 \cdot 0{,}0020 + 0{,}1420 = 0{,}14713 \rightarrow \textbf{0,1471 ppm}$$

Los individuos por encima de 0,1471 ppm de tóxico en sangre se considerarán enfermos.

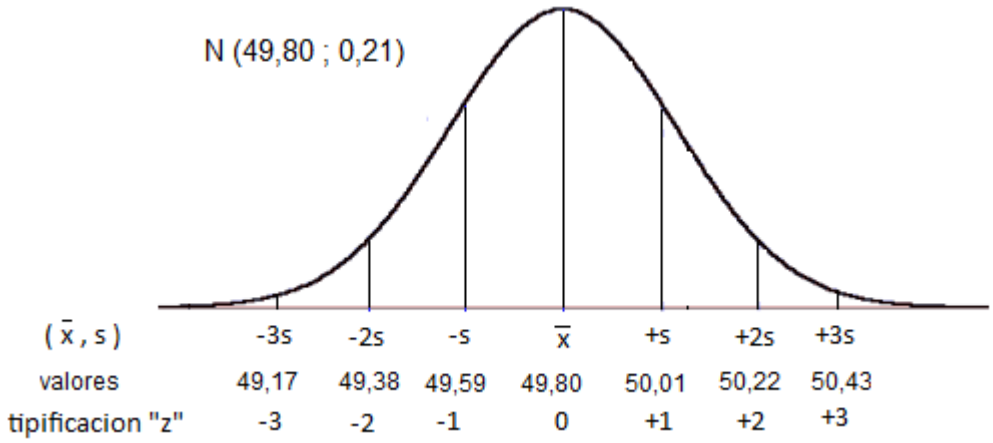
## EJERCICIO 3:

El análisis de un mineral presenta un contenido de Cu del 49,80 % (p/p) con una desviación estándar de 0,21 %.

¿Cuál será la probabilidad de que una determinación aislada nos resulte mayor de 50,12 %?

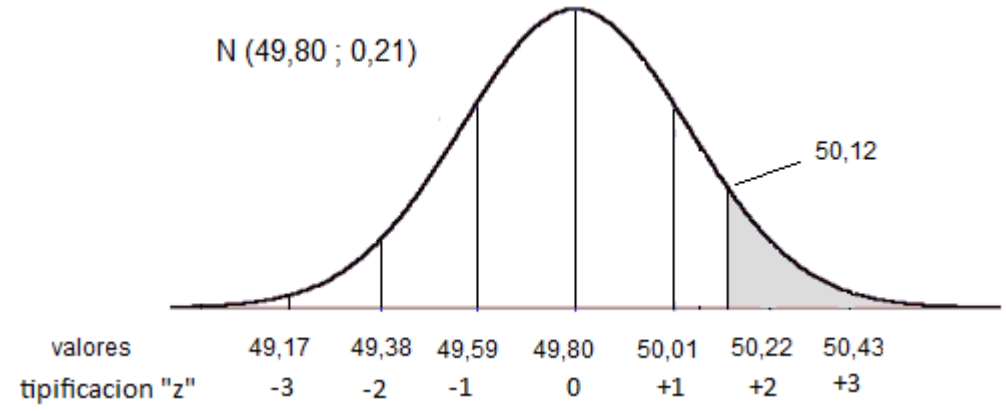
## Solución ejercicio 3:

La información que tenemos sobre el ejercicio la podemos observar en la gráfica.




Con nuestro ejercicio operaremos como sigue:

Primero gráficamente conocer que buscamos:




Buscamos el valor de "z" para $x_i$ = 50,12 %.

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(50{,}12 - 49{,}80)}{0{,}21} = 1{,}52$$

Para este valor de z = 1,52; la probabilidad obtenida en la tabla será: 0,9357.

Como la tabla nos da valores por debajo de z = 1,43. Así tendremos que la probabilidad será: P (z ≥ 1,52) = 1 – P (z ≤ 1,52) = 1 – 0,9357 = **0,0643 (6,43 %)**.

## EJERCICIO 4:

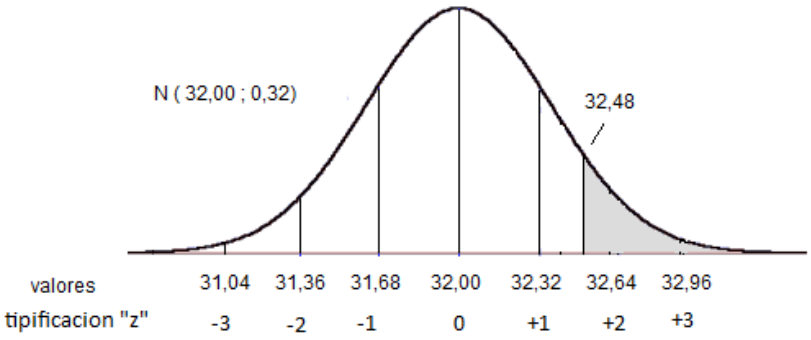
En una medida tenemos como valor correcto 32,00 la desviación estándar vale 0,32. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que una medida tenga una desviación mayor a 0,48 respecto del valor medio.

b) Si tenemos 420 muestras, determinar el porcentaje y cantidad que hay que esperar den un resultado menor o igual a 31,20.

## Solución ejercicio 4:

a) Observamos el ejercicio gráficamente para conocer que buscamos:



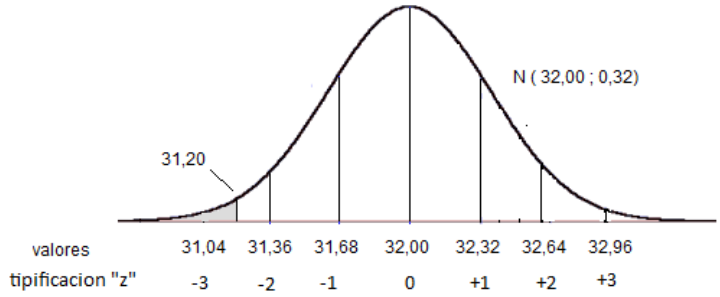

Buscamos el valor de "z" para $x_i$ = 32,48 %.

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(32{,}48 - 32{,}00)}{0{,}32} = 1{,}5$$

Para este valor de z = 1,5; la probabilidad obtenida en la tabla será: 0,9332.

Como la tabla nos da valores por debajo de z = 1,5. Así tendremos que la probabilidad será: P (z ≥ 1,5) = 1 – P (z ≤ 1,5) = 1 – 0,9332 = **0,0668 (6,68 %)**.

b) Primero observamos la gráfica:




Tipificamos para $x_i$ = 31,20. $$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(31{,}20 - 32{,}00)}{0{,}32} = -2{,}5$$

Buscamos en la tabla para z = 2,5. La probabilidad es: P = 0,9938.

Como la tabla es simétrica: P (z ≤ -2,5) = 1 – P (z ≤ 2,5) = 1 – 0,9938 = **0,0062 = 0,62 %**

Como tenemos 420 muestras, aplicando el % tendremos: 420 · 0,62 % = **2,6 ≈ 3 muestras.**

## EJERCICIO 5:

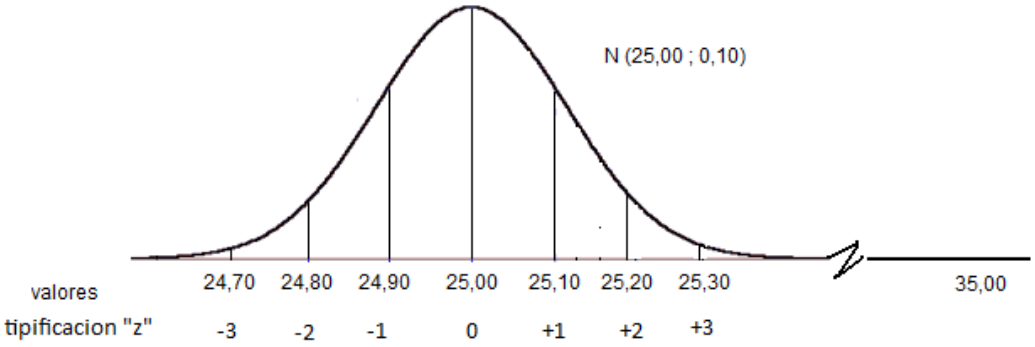
Analizamos 10 000 tubos de pasta dentífrica para determinar el contenido en fluoruros. Se obtienen los resultados siguientes: valor medio = 25,00 mg/l y la desviación estándar, s = 0,10 mg/l. Se pide:

a) ¿Cuántos tubos tienen más de 35,00 mg/l.

b) ¿En qué intervalo de concentración se encuentran el 80 % de los tubos?

## Solución ejercicio 5:

a) Con nuestro ejercicio operaremos como sigue:

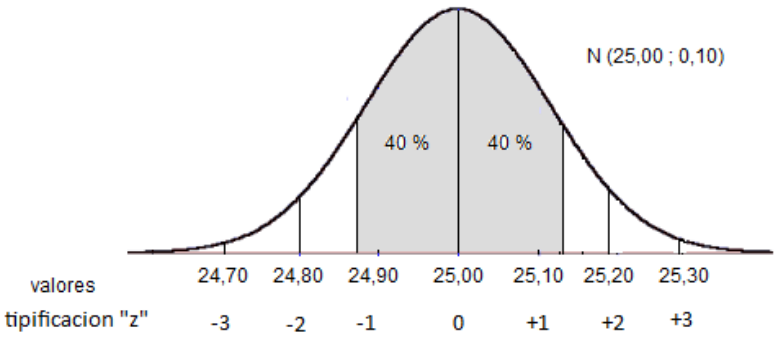



Como podemos observar el valor 35,00 está muy alejado de los valores y prácticamente no tendrá ninguna probabilidad de obtenerse este resultado. Aún así tipificamos para este valor:

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(35{,}00 - 25{,}00)}{0{,}10} = 100$$

Como ya sabíamos el valor de z es tan alto que la probabilidad de encontrar un tubo con una concentración de 35,00 mg/l de fluoruros es prácticamente 0. **P = 0**.

b) Habrá un 40 % de probabilidades a cada lado del eje de simetría que lo da el valor medio. En gráfico:




Buscamos en la tabla el valor de z al que le correspondería una probabilidad del 90 % = 50 % + 40 %. P = 0,9000. Podemos considerar con bastante aproximación z = 1,285;

Para este valor de z y operando con la fórmula de tipificación buscando $x_i$.

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} \Rightarrow x_i = z \cdot s + \bar{x} = 1{,}285 \cdot 0{,}10 + 25{,}00 = 25{,}128 \rightarrow \textbf{25,13 mg/l}$$

Como la curva es simétrica tendremos el otro valor: 25,00 – (25,13 – 25,00) = **24,87 mg/l**

El **intervalo** será por tanto **(24,87 ; 25,13) mg/l**

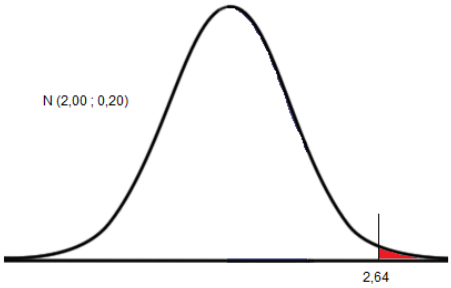
## EJERCICIO 6:

Se hace un estudio en 10 000 botes de pintura para conocer su contenido en plomo. Los datos obtenidos son: valor medio = 2,00 ppm y la desviación estándar, s = 0,20 ppm.

Si se establece que no se pueden comercializar botes con más de 2,64 ppm de plomo, ¿qué porcentaje de botes debe descartarse?

## Solución ejercicio 6:

Se observa en el gráfico que estamos buscando:




Ahora tipificamos para ese valor de $x_i$ = 2,64.

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(2{,}64 - 2{,}00)}{0{,}20} = 3{,}2$$

Para este valor de z = 3,2; obtenemos en la tabla una probabilidad P (z ≤ 3,2) = 0,9993.

Buscamos el valor de P (z ≥ 3,2) = 1 - P (z ≤ 3,2) = 1 – 0,9993 = **0,0007 (0,07 %).**

Por tanto en un lote con 10 000 botes y aplicando el %: 10 000 · 0,07 % = **7 botes por lote**.

## EJERCICIO 7:

Un estudio efectuado sobre 240 muestras de aceros especiales, aleados con manganeso, ha proporcionado los siguientes resultados en % Mn (p/). Media aritmética = 1,35 % y la desviación estándar, s = 0,21 %.

Para hacer otros análisis, el departamento del Control de Calidad ha establecido una escala cualitativa donde los posibles valores en % Mn quedan clasificados de la siguiente manera:

| | | |
|---|---|---|
| I. | Valores excesivamente bajos | 5 % inferior. |
| II. | Valores bajos aceptables | 20 % siguiente |
| III. | Valores aceptables | 50 % central |
| IV. | Valores altos aceptables | 20 % siguiente |
| V. | Valores excesivamente altos | 5 % superior |

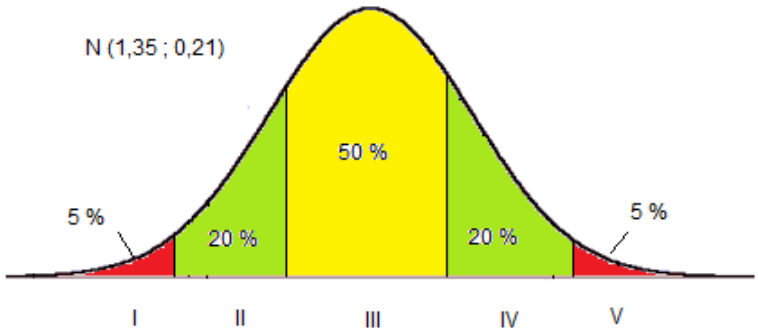
Determinar:

a) Los límites en % Mn en la clasificación anterior.

b) ¿Qué probabilidad hay de que un valor supere el 1,63 % de Mn?

## Solución ejercicio 7:

a) Con nuestro ejercicio operaremos como sigue:




En esta representación podemos observar las probabilidades de cada uno de los valores. Buscaremos los valores por encima de 50 % que son los que se obtienen por las tablas.

Para el valor de probabilidad del 95 %, que será la separación entre los grupos IV y V en la clasificación:

P = 0,9500 → z= 1,645.

Con la fórmula de tipificación, buscaremos $x_i$:

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} \Rightarrow x_i = z \cdot s + \bar{x} = 1{,}645 \cdot 0{,}21 + 1{,}35 = \mathbf{1{,}695\ \%}$$

Buscaremos ahora para el valor de probabilidad 75 %, separación entre los grupos III y IV:

P = 0,7500 → z = 0,675

Con la fórmula de tipificación:

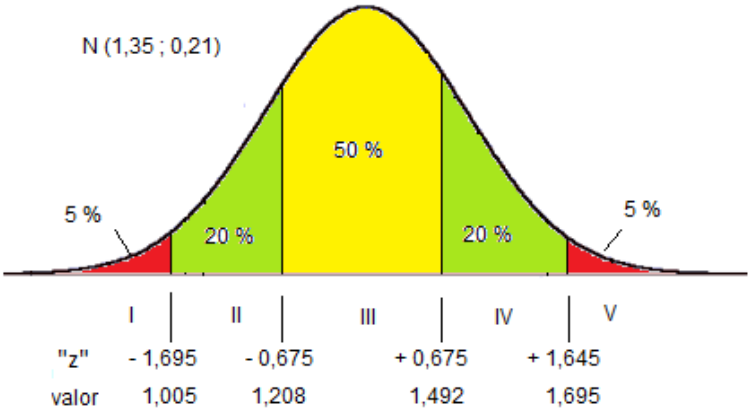
$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} \Rightarrow x_i = z \cdot s + \bar{x} = 0{,}675 \cdot 0{,}21 + 1{,}35 = \mathbf{1{,}492\ \%}$$

Como la curva es simétrica podemos encontrar los otros dos valores:

1,35 – (1,695 – 1,35) = **1,005 %**

1,35 – (1,492 – 1,35) = **1,208 %**

Nos quedaría ahora el gráfico:



## EJERCICIO 8:

En un determinado colectivo el nivel de colesterol en sangre presenta un valor medio = 205 mg/100 ml y con una desviación estándar de 22 mg/100 ml.

Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar tenga un nivel de colesterol en sangre:

a) Entre 205 y 215 mg/100 ml.

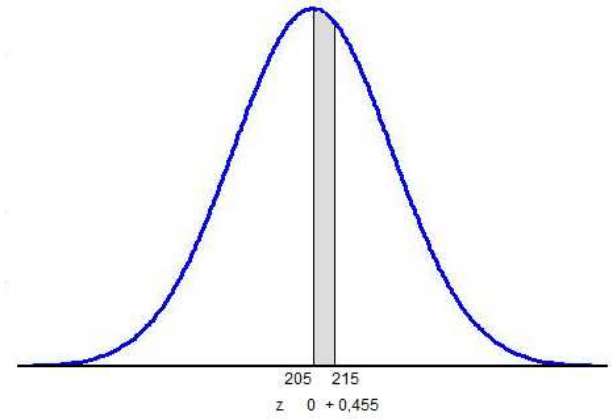
b) Entre 195 y 205 mg/100 ml.

c) Mayor que 280 mg/100 ml.

d) Menor que 180 mg/100 ml.

## Solución ejercicio 8:

a) Con nuestro ejercicio operaremos como sigue:

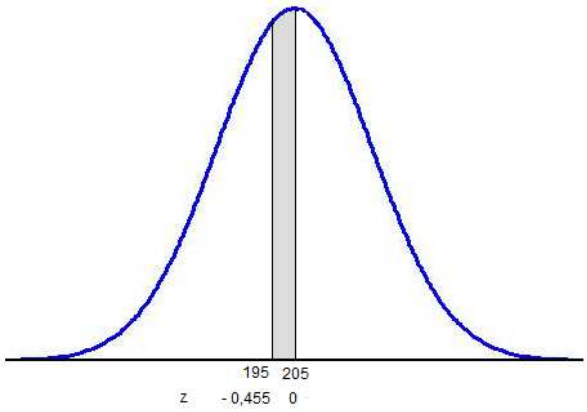



Tipificamos para el valor 215 mg/100 ml: $z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(215-205)}{22} = 0{,}455$

Buscamos en la tabla: P (z ≤ 0,455) = 0,6754.

Realmente buscamos P (0 ≤ z ≤ 0,455) = P (z ≤ 0,4559) – 0,5000 = 0,6754 – 0,5000 = **0,1754 (17,54 %).**

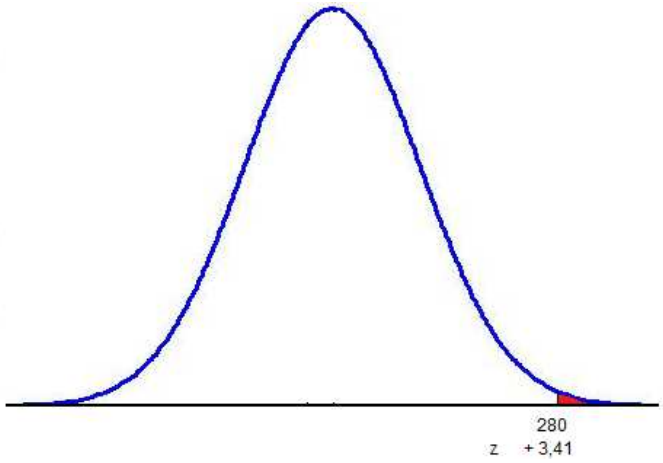
b) La gráfica es simétrica y en este caso buscamos el mismo porcentaje como se puede apreciar en el gráfico:




El porcentaje será también **17,54 %.**

c) Mayor 280 mg/100 ml.

Observemos el gráfico:




Ahora tipificamos para ese valor de $x_i$ = 280.

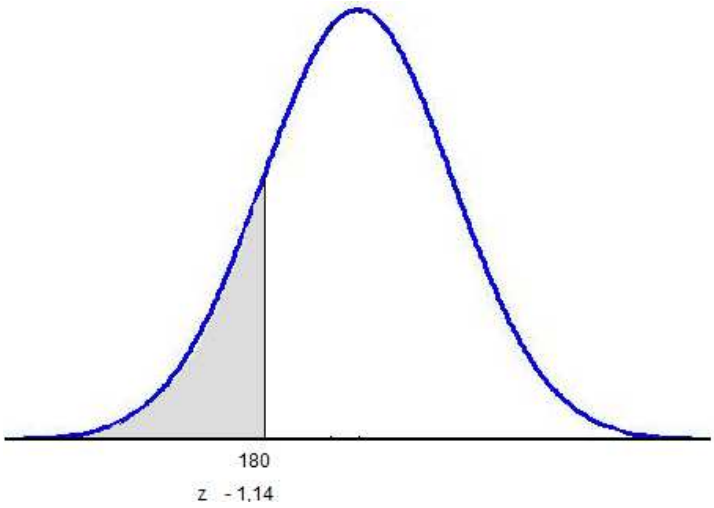
$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(280 - 205)}{22} = 3{,}41$$

Para este valor de z = 3,41; obtenemos en la tabla una probabilidad P (z ≤ 3,41) = 0,9997.

Buscamos el valor de P (z ≥ 3,41) = 1 - P (z ≤ 3,41) = 1 – 0,9997 = **0,0003 (0,03 %).**

d) Menor a 180 mg/100 ml.

Observemos el gráfico:




Tipificamos para $x_i$ = 180. $$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(180 - 205)}{22} = -1{,}14$$

Buscamos en la tabla para z = 1,14. La probabilidad es: P = 0,8729.

Como la tabla es simétrica: P (z ≤ -1,14) = 1 – P (z ≤ 1,14) = 1 – 0,8729 = **0,1271 = 12,71 %**

## EJERCICIO 9:

El 51,1 % de los trabajadores presenta un nivel por encima de los 200 mg/100 ml de colesterol en sangre y el 20,54 % tiene un nivel sobre los 240 mg/100 ml, según un estudio en 10 000 trabajadores. Se pide:

a) Calcular el valor medio y la desviación estándar de la población estudiada.

b) Calcular el nº de trabajadores que presentará en su sangre valores entre 150 y 200 mg/100 ml.

c) ¿Cuántas personas tendrán un nivel de colesterol por encima de 280 mg/100 ml de sangre?

## Solución ejercicio 9:

a) Con nuestro ejercicio operaremos como sigue tras ver el gráfico.




Buscamos en la tabla para la probabilidad = 51,1 % ≈ 0,5110. Este valor no se encuentra en la tabla, pero si el valor por debajo es el 0,5080 y por encima el 0,5120; extrapolando, el valor de z = 0,275 aprox.

Como buscamos el simétrico z = - 0,275

Buscamos ahora en la tabla la probabilidad de (100 – 20,54) % = 79,46 %; 0,7946.

El valor de z para P = 0,7946. Este valor no se encuentra en la tabla, pero si el valor por debajo es el 0,7939 y por encima el 0,7967; extrapolando, el valor de z = 0,823 aprox.

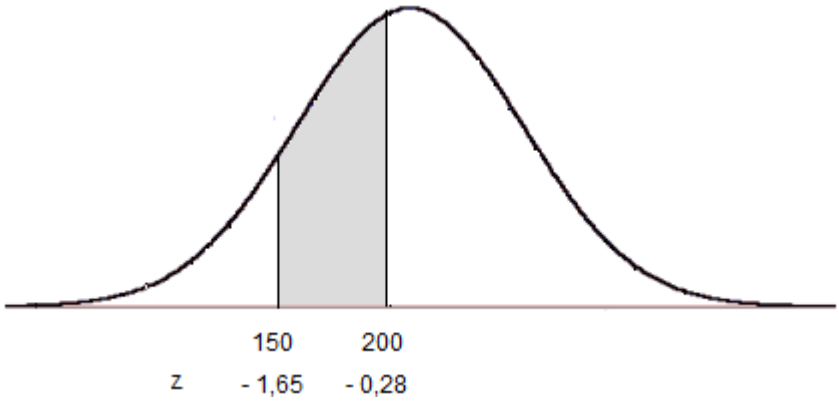
Podemos plantear un sistema de ecuaciones tipificando los valores de "z" obtenidos. Así:

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} \qquad \boxed{-0{,}275 = \frac{(200 - \bar{x})}{s}} \qquad \boxed{0{,}823 = \frac{(240 - \bar{x})}{s}}$$

Si resolvemos nos quedará: $\bar{x}$ **= 210,02 mg/100 ml; y s = 36,43 mg/100 ml.**

b) Ahora tipificaremos para 150 mg/100ml y 210 mg/100 ml.

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(150 - 210{,}02)}{36{,}43} = -1{,}65 \qquad z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(200 - 210{,}02)}{36{,}43} = -0{,}28$$



Buscamos en la tabla los simétricos a z = - 1,65 y z = - 0,28.

Así obtendremos.

P (z ≤ 1,65) = 0,9505

P (z ≤ 0,28) = 0,6103

El porcentaje será la resta: P (-1,65 ≤ z ≤ -0,28) = 0,9505 – 0,6103 = **0,3402 (34,02 %).**

Por tanto habrá un 34,02 % de personas que tendrán un nivel de colesterol entre 150 y 200 mg/100 ml.

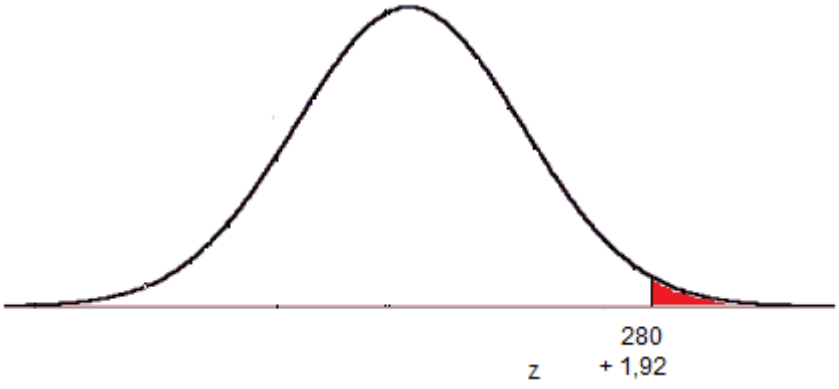
c) Tipificamos el valor de $x_i$ = 280.

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(280 - 210{,}02)}{36{,}43} = +1{,}92$$

Para este valor de z = 1,92; obtenemos en la tabla una probabilidad P (z ≤ 1,92) = 0,9726.

Buscamos el valor de P (z ≥ 1,92) = 1 - P (z ≤ 1,92) = 1 – 0,9727 = **0,0273 (2,73 %).**

Para una población de 10 000 personas: 10 000 · 2,73 % = **273 personas**




## EJERCICIO 10:

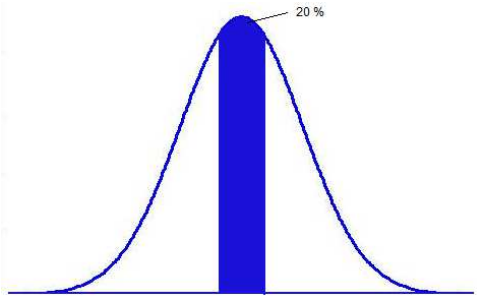
Se han realizado 30 valoraciones de oxalato con permanganato. Los datos obtenidos han sido los siguientes: el valor medio = 0,25 M y la desviación estándar = 0,08 M. Se pide:

a) ¿Qué valores es previsible que se encuentren en el 20 % central de la serie?

b) Si consideramos que concentraciones por encima de 0,30 M y por debajo de 0,20 M no son aceptables, ¿qué porcentaje de preparaciones se han de descartar?

## Solución ejercicio 10:

a) 20 % de la serie gráficamente:




Buscamos el valor de z para el valor de probabilidad del 60 % (0,6000). Así z =

Buscamos en la tabla para la probabilidad = 60 % (0,6000). Este valor no se encuentra en la tabla, pero si el valor por debajo es el 0,5987 y por encima el 0,6026; extrapolando, el valor de z = 0,253 aprox.

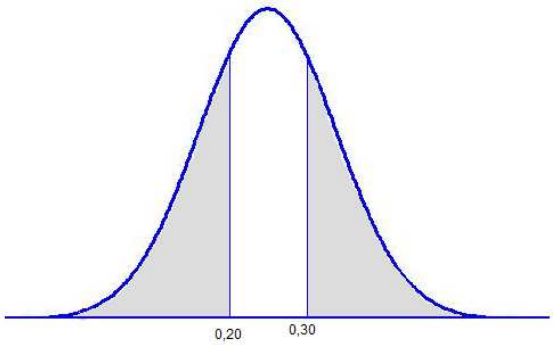
Calculamos ahora los valores de $x_i$ para los valores de z = - 0,253 y z = + 0,253.

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} \Rightarrow x_i = z \cdot s + \bar{x} = -0{,}253 \cdot 0{,}08 + 0{,}25 = \mathbf{0{,}23\ M}$$

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} \Rightarrow x_i = z \cdot s + \bar{x} = +0{,}253 \cdot 0{,}08 + 0{,}25 = \mathbf{0{,}27\ M}$$

Es decir, el **intervalo** de concentraciones en el 20 % central de la serie será: **(0,23 ; 0,27) M**.

b) No se aceptan valores por debajo de 0,20 M y por encima de 0,30 M.




Tipificando para $x_i$ = 0,20 M y para $x_i$ = 0,30 M.

$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(0{,}20 - 0{,}25)}{0{,}08} = -0{,}625$$

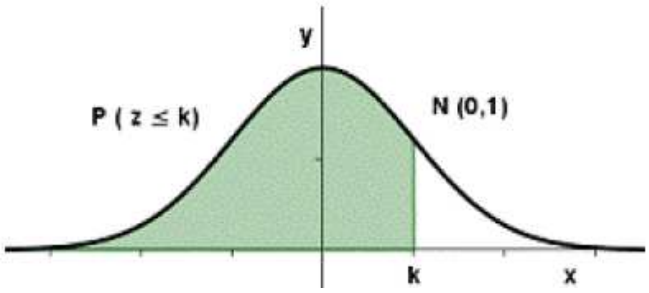
$$z = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} = \frac{(0{,}30 - 0{,}25)}{0{,}08} = +0{,}625$$

Buscamos en la tabla la probabilidad para z = 0,625, obteniendo por interpolación P = 0,7340 aprox.

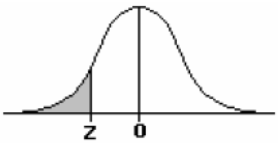
Como buscamos 1 de los sectores representados = 1- 0,7340 = 0,2660.

Como los dos sectores son iguales, tendremos: 2 · 0,2660 = **0,5320 (53,20 %).**

# ANEXOS - TABLAS




| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7652 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8930 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9561 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9934 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9901 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9954 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |

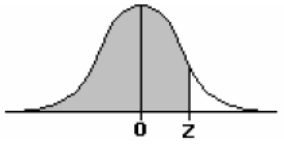



# TABLA I (A)

## DISTRIBUCIÓN NORMAL TIPIFICADA $N(0, 1)$

La tabla proporciona, para cada valor de z, el área que queda a su izquierda.

| z | 0'00 | 0'01 | 0'02 | 0'03 | 0'04 | 0'05 | 0'06 | 0'07 | 0'08 | 0'09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **-4'4** | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00000 | 0'00000 | 0'00000 | 0'00000 | 0'00000 | 0'00000 | 0'00000 |
| **-4'3** | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 |
| **-4'2** | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 | 0'00001 |
| **-4'1** | 0'00002 | 0'00002 | 0'00002 | 0'00002 | 0'00002 | 0'00002 | 0'00002 | 0'00002 | 0'00002 | 0'00001 |
| **-4'0** | 0'00003 | 0'00003 | 0'00003 | 0'00003 | 0'00003 | 0'00003 | 0'00002 | 0'00002 | 0'00002 | 0'00002 |
| **-3'9** | 0'00005 | 0'00005 | 0'00004 | 0'00004 | 0'00004 | 0'00004 | 0'00004 | 0'00004 | 0'00003 | 0'00003 |
| **-3'8** | 0'00007 | 0'00007 | 0'00007 | 0'00006 | 0'00006 | 0'00006 | 0'00006 | 0'00005 | 0'00005 | 0'00005 |
| **-3'7** | 0'00011 | 0'00010 | 0'00010 | 0'00010 | 0'00009 | 0'00009 | 0'00009 | 0'00008 | 0'00008 | 0'00008 |
| **-3'6** | 0'00016 | 0'00015 | 0'00015 | 0'00014 | 0'00014 | 0'00013 | 0'00013 | 0'00012 | 0'00012 | 0'00011 |
| **-3'5** | 0'00023 | 0'00023 | 0'00022 | 0'00021 | 0'00020 | 0'00019 | 0'00019 | 0'00018 | 0'00017 | 0'00017 |
| **-3'4** | 0'00034 | 0'00033 | 0'00032 | 0'00030 | 0'00029 | 0'00028 | 0'00027 | 0'00026 | 0'00025 | 0'00024 |
| **-3'3** | 0'00049 | 0'00047 | 0'00045 | 0'00044 | 0'00042 | 0'00041 | 0'00039 | 0'00038 | 0'00036 | 0'00035 |
| **-3'2** | 0'00069 | 0'00067 | 0'00064 | 0'00062 | 0'00060 | 0'00058 | 0'00056 | 0'00054 | 0'00052 | 0'00050 |
| **-3'1** | 0'00097 | 0'00094 | 0'00091 | 0'00088 | 0'00085 | 0'00082 | 0'00079 | 0'00077 | 0'00074 | 0'00071 |
| **-3'0** | 0'00135 | 0'00131 | 0'00127 | 0'00123 | 0'00119 | 0'00115 | 0'00111 | 0'00107 | 0'00104 | 0'00101 |
| **-2'9** | 0'00187 | 0'00181 | 0'00175 | 0'00169 | 0'00164 | 0'00159 | 0'00154 | 0'00149 | 0'00144 | 0'00139 |
| **-2'8** | 0'00256 | 0'00248 | 0'00240 | 0'00233 | 0'00226 | 0'00219 | 0'00212 | 0'00205 | 0'00199 | 0'00193 |
| **-2'7** | 0'00347 | 0'00336 | 0'00326 | 0'00317 | 0'00307 | 0'00298 | 0'00289 | 0'00280 | 0'00272 | 0'00264 |
| **-2'6** | 0'00466 | 0'00453 | 0'00440 | 0'00427 | 0'00415 | 0'00402 | 0'00391 | 0'00379 | 0'00368 | 0'00357 |
| **-2'5** | 0'00621 | 0'00604 | 0'00587 | 0'00570 | 0'00554 | 0'00539 | 0'00523 | 0'00508 | 0'00494 | 0'00480 |
| **-2'4** | 0'00820 | 0'00798 | 0'00776 | 0'00755 | 0'00734 | 0'00714 | 0'00695 | 0'00676 | 0'00657 | 0'00639 |
| **-2'3** | 0'01072 | 0'01044 | 0'01017 | 0'00990 | 0'00964 | 0'00939 | 0'00914 | 0'00889 | 0'00866 | 0'00842 |
| **-2'2** | 0'01390 | 0'01355 | 0'01321 | 0'01287 | 0'01255 | 0'01222 | 0'01191 | 0'01160 | 0'01130 | 0'01101 |
| **-2'1** | 0'01786 | 0'01743 | 0'01700 | 0'01659 | 0'01618 | 0'01578 | 0'01539 | 0'01500 | 0'01463 | 0'01426 |
| **-2'0** | 0'02275 | 0'02222 | 0'02169 | 0'02118 | 0'02068 | 0'02018 | 0'01970 | 0'01923 | 0'01876 | 0'01831 |
| **-1'9** | 0'02872 | 0'02807 | 0'02743 | 0'02680 | 0'02619 | 0'02559 | 0'02500 | 0'02442 | 0'02385 | 0'02330 |
| **-1'8** | 0'03593 | 0'03515 | 0'03438 | 0'03362 | 0'03288 | 0'03216 | 0'03144 | 0'03074 | 0'03005 | 0'02938 |
| **-1'7** | 0'04457 | 0'04363 | 0'04272 | 0'04182 | 0'04093 | 0'04006 | 0'03920 | 0'03836 | 0'03754 | 0'03673 |
| **-1'6** | 0'05480 | 0'05370 | 0'05262 | 0'05155 | 0'05050 | 0'04947 | 0'04846 | 0'04746 | 0'04648 | 0'04551 |
| **-1'5** | 0'06681 | 0'06552 | 0'06426 | 0'06301 | 0'06178 | 0'06057 | 0'05938 | 0'05821 | 0'05705 | 0'05592 |
| **-1'4** | 0'08076 | 0'07927 | 0'07780 | 0'07636 | 0'07493 | 0'07353 | 0'07214 | 0'07078 | 0'06944 | 0'06811 |
| **-1'3** | 0'09680 | 0'09510 | 0'09342 | 0'09176 | 0'09012 | 0'08851 | 0'08692 | 0'08534 | 0'08379 | 0'08226 |
| **-1'2** | 0'11507 | 0'11314 | 0'11123 | 0'10935 | 0'10749 | 0'10565 | 0'10383 | 0'10204 | 0'10027 | 0'09853 |
| **-1'1** | 0'13567 | 0'13350 | 0'13136 | 0'12924 | 0'12714 | 0'12507 | 0'12302 | 0'12100 | 0'11900 | 0'11702 |
| **-1'0** | 0'15866 | 0'15625 | 0'15386 | 0'15150 | 0'14917 | 0'14687 | 0'14457 | 0'14231 | 0'14007 | 0'13786 |
| **-0'9** | 0'18406 | 0'18141 | 0'17879 | 0'17619 | 0'17361 | 0'17106 | 0'16853 | 0'16602 | 0'16354 | 0'16109 |
| **-0'8** | 0'21186 | 0'20897 | 0'20611 | 0'20327 | 0'20045 | 0'19766 | 0'19489 | 0'19215 | 0'18925 | 0'18673 |
| **-0'7** | 0'24196 | 0'23885 | 0'23576 | 0'23270 | 0'22965 | 0'22663 | 0'22363 | 0'22065 | 0'21770 | 0'21476 |
| **-0'6** | 0'27425 | 0'27093 | 0'26763 | 0'26435 | 0'26109 | 0'25785 | 0'25463 | 0'25143 | 0'24825 | 0'24510 |
| **-0'5** | 0'30854 | 0'30503 | 0'30153 | 0'29806 | 0'29550 | 0'29116 | 0'28774 | 0'28434 | 0'28096 | 0'27760 |
| **-0'4** | 0'34446 | 0'34090 | 0'33724 | 0'33360 | 0'32997 | 0'32636 | 0'32276 | 0'31918 | 0'31561 | 0'31207 |
| **-0'3** | 0'38209 | 0'37828 | 0'37448 | 0'37070 | 0'36693 | 0'36317 | 0'35942 | 0'35569 | 0'35197 | 0'34827 |
| **-0'2** | 0'42074 | 0'41683 | 0'41294 | 0'40905 | 0'40517 | 0'40129 | 0'39743 | 0'39358 | 0'38974 | 0'38591 |
| **-0'1** | 0'46017 | 0'45620 | 0'45234 | 0'44828 | 0'44433 | 0'44038 | 0'43644 | 0'43251 | 0'42858 | 0'42465 |
| **-0'0** | 0'50000 | 0'49601 | 0'49202 | 0'48803 | 0'48405 | 0'48006 | 0'47608 | 0'47210 | 0'46812 | 0'46414 |

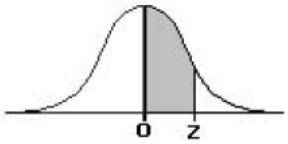



# TABLA I (B)

## DISTRIBUCIÓN NORMAL TIPIFICADA $N(0, 1)$

La tabla proporciona, para cada valor de z, el área que queda a su izquierda.

| z | 0'00 | 0'01 | 0'02 | 0'03 | 0'04 | 0'05 | 0'06 | 0'07 | 0'08 | 0'09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0'0 | 0'50000 | 0'50399 | 0'50798 | 0'51197 | 0'51595 | 0'51994 | 0'52392 | 0'52790 | 0'53188 | 0'53586 |
| 0'1 | 0'53983 | 0'54380 | 0'54766 | 0'55172 | 0'55567 | 0'55962 | 0'56356 | 0'56749 | 0'57142 | 0'57535 |
| 0'2 | 0'57926 | 0'58317 | 0'58706 | 0'59095 | 0'59483 | 0'59871 | 0'60257 | 0'60642 | 0'61026 | 0'61409 |
| 0'3 | 0'61791 | 0'62172 | 0'62552 | 0'62930 | 0'63307 | 0'63683 | 0'64058 | 0'64431 | 0'64803 | 0'65173 |
| 0'4 | 0'65554 | 0'65910 | 0'66276 | 0'66640 | 0'67003 | 0'67364 | 0'67724 | 0'68082 | 0'68439 | 0'68793 |
| 0'5 | 0'69146 | 0'69497 | 0'69847 | 0'70194 | 0'70450 | 0'70884 | 0'71226 | 0'71566 | 0'71904 | 0'72240 |
| 0'6 | 0'72575 | 0'72907 | 0'73237 | 0'73565 | 0'73891 | 0'74215 | 0'74537 | 0'74857 | 0'75175 | 0'75490 |
| 0'7 | 0'75804 | 0'76115 | 0'76424 | 0'76730 | 0'77035 | 0'77337 | 0'77637 | 0'77935 | 0'78230 | 0'78524 |
| 0'8 | 0'78814 | 0'79103 | 0'79389 | 0'79673 | 0'79955 | 0'80234 | 0'80511 | 0'80785 | 0'81075 | 0'81327 |
| 0'9 | 0'81594 | 0'81859 | 0'82121 | 0'82381 | 0'82639 | 0'82894 | 0'83147 | 0'83398 | 0'83646 | 0'83891 |
| 1'0 | 0'84134 | 0'84375 | 0'84614 | 0'84850 | 0'85083 | 0'85313 | 0'85543 | 0'85769 | 0'85993 | 0'86214 |
| 1'1 | 0'86433 | 0'86650 | 0'86864 | 0'87076 | 0'87286 | 0'87493 | 0'87698 | 0'87900 | 0'88100 | 0'88298 |
| 1'2 | 0'88493 | 0'88686 | 0'88877 | 0'89065 | 0'89251 | 0'89435 | 0'89617 | 0'89796 | 0'89973 | 0'90147 |
| 1'3 | 0'90320 | 0'90490 | 0'90658 | 0'90824 | 0'90988 | 0'91149 | 0'91308 | 0'91466 | 0'91621 | 0'91774 |
| 1'4 | 0'91924 | 0'92073 | 0'92220 | 0'92364 | 0'92507 | 0'92647 | 0'92786 | 0'92922 | 0'93056 | 0'93189 |
| 1'5 | 0'93319 | 0'93448 | 0'93574 | 0'93699 | 0'93822 | 0'93943 | 0'94062 | 0'94179 | 0'94295 | 0'94408 |
| 1'6 | 0'94520 | 0'94630 | 0'94738 | 0'94845 | 0'94950 | 0'95053 | 0'95154 | 0'95254 | 0'95352 | 0'95449 |
| 1'7 | 0'95543 | 0'95637 | 0'95728 | 0'95818 | 0'95907 | 0'95994 | 0'96080 | 0'96164 | 0'96246 | 0'96327 |
| 1'8 | 0'96407 | 0'96485 | 0'96562 | 0'96638 | 0'96712 | 0'96784 | 0'96856 | 0'96926 | 0'96995 | 0'97062 |
| 1'9 | 0'97128 | 0'97193 | 0'97257 | 0'97320 | 0'97381 | 0'97441 | 0'97500 | 0'97558 | 0'97615 | 0'97670 |
| 2'0 | 0'97725 | 0'97778 | 0'97831 | 0'97882 | 0'97932 | 0'97982 | 0'98030 | 0'98077 | 0'98124 | 0'98169 |
| 2'1 | 0'98214 | 0'98257 | 0'98300 | 0'98341 | 0'98382 | 0'98422 | 0'98461 | 0'98500 | 0'98537 | 0'98574 |
| 2'2 | 0'98610 | 0'98645 | 0'98679 | 0'98713 | 0'98745 | 0'98778 | 0'98809 | 0'98840 | 0'98870 | 0'98899 |
| 2'3 | 0'98928 | 0'98956 | 0'98983 | 0'99010 | 0'99036 | 0'99061 | 0'99086 | 0'99111 | 0'99134 | 0'99158 |
| 2'4 | 0'99180 | 0'99202 | 0'99224 | 0'99245 | 0'99266 | 0'99286 | 0'99305 | 0'99324 | 0'99343 | 0'99361 |
| 2'5 | 0'99379 | 0'99396 | 0'99413 | 0'99430 | 0'99446 | 0'99461 | 0'99477 | 0'99492 | 0'99506 | 0'99520 |
| 2'6 | 0'99534 | 0'99547 | 0'99560 | 0'99573 | 0'99585 | 0'99598 | 0'99609 | 0'99621 | 0'99632 | 0'99643 |
| 2'7 | 0'99653 | 0'99664 | 0'99674 | 0'99683 | 0'99693 | 0'99702 | 0'99711 | 0'99720 | 0'99728 | 0'99736 |
| 2'8 | 0'99744 | 0'99752 | 0'99760 | 0'99767 | 0'99774 | 0'99781 | 0'99788 | 0'99795 | 0'99801 | 0'99807 |
| 2'9 | 0'99813 | 0'99819 | 0'99825 | 0'99831 | 0'99836 | 0'99841 | 0'99846 | 0'99851 | 0'99856 | 0'99861 |
| 3'0 | 0'99865 | 0'99869 | 0'99873 | 0'99877 | 0'99881 | 0'99885 | 0'99889 | 0'99893 | 0'99896 | 0'99899 |
| 3'1 | 0'99903 | 0'99906 | 0'99909 | 0'99912 | 0'99915 | 0'99918 | 0'99921 | 0'99923 | 0'99926 | 0'99929 |
| 3'2 | 0'99931 | 0'99933 | 0'99936 | 0'99938 | 0'99940 | 0'99942 | 0'99944 | 0'99946 | 0'99948 | 0'99950 |
| 3'3 | 0'99951 | 0'99953 | 0'99955 | 0'99956 | 0'99958 | 0'99959 | 0'99961 | 0'99962 | 0'99964 | 0'99965 |
| 3'4 | 0'99966 | 0'99967 | 0'99968 | 0'99970 | 0'99971 | 0'99972 | 0'99973 | 0'99974 | 0'99975 | 0'99976 |
| 3'5 | 0'99977 | 0'99977 | 0'99978 | 0'99979 | 0'99980 | 0'99981 | 0'99981 | 0'99982 | 0'99983 | 0'99983 |
| 3'6 | 0'99984 | 0'99985 | 0'99985 | 0'99986 | 0'99986 | 0'99987 | 0'99987 | 0'99988 | 0'99988 | 0'99989 |
| 3'7 | 0'99989 | 0'99990 | 0'99990 | 0'99990 | 0'99991 | 0'99991 | 0'99991 | 0'99992 | 0'99992 | 0'99992 |
| 3'8 | 0'99993 | 0'99993 | 0'99993 | 0'99994 | 0'99994 | 0'99994 | 0'99994 | 0'99995 | 0'99995 | 0'99995 |
| 3'9 | 0'99995 | 0'99995 | 0'99996 | 0'99996 | 0'99996 | 0'99996 | 0'99996 | 0'99996 | 0'99997 | 0'99997 |
| 4'0 | 0'99997 | 0'99997 | 0'99997 | 0'99997 | 0'99997 | 0'99997 | 0'99998 | 0'99998 | 0'99998 | 0'99998 |
| 4'1 | 0'99998 | 0'99998 | 0'99998 | 0'99998 | 0'99998 | 0'99998 | 0'99998 | 0'99998 | 0'99999 | 0'99999 |
| 4'2 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 |
| 4'3 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 |
| 4'4 | 0'99999 | 0'99999 | 0'99999 | 1'00000 | 1'00000 | 1'00000 | 1'00000 | 1'00000 | 1'00000 | 1'00000 |




# TABLA II

## DISTRIBUCIÓN NORMAL TIPIFICADA $N(0, 1)$

La tabla proporciona el área que queda comprendida entre **0** y **z.**

| z | 0'00 | 0'01 | 0'02 | 0'03 | 0'04 | 0'05 | 0'06 | 0'07 | 0'08 | 0'09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0'0** | 0'00000 | 0'00399 | 0'00798 | 0'01197 | 0'01595 | 0'01994 | 0'02392 | 0'02790 | 0'03188 | 0'03586 |
| **0'1** | 0'03983 | 0'04380 | 0'04766 | 0'05172 | 0'05567 | 0'05962 | 0'06356 | 0'06749 | 0'07142 | 0'07535 |
| **0'2** | 0'07926 | 0'08317 | 0'08706 | 0'09095 | 0'09483 | 0'09871 | 0'10257 | 0'10642 | 0'11026 | 0'11409 |
| **0'3** | 0'11791 | 0'12172 | 0'12552 | 0'12930 | 0'13307 | 0'13683 | 0'14058 | 0'14431 | 0'14803 | 0'15173 |
| **0'4** | 0'15554 | 0'15910 | 0'16276 | 0'16640 | 0'17003 | 0'17364 | 0'17724 | 0'18082 | 0'18439 | 0'18793 |
| **0'5** | 0'19146 | 0'19497 | 0'19847 | 0'20194 | 0'20450 | 0'20884 | 0'21226 | 0'21566 | 0'21904 | 0'22240 |
| **0'6** | 0'22575 | 0'22907 | 0'23237 | 0'23565 | 0'23891 | 0'24215 | 0'24537 | 0'24857 | 0'25175 | 0'25490 |
| **0'7** | 0'25804 | 0'26115 | 0'26424 | 0'26730 | 0'27035 | 0'27337 | 0'27637 | 0'27935 | 0'28230 | 0'28524 |
| **0'8** | 0'28814 | 0'29103 | 0'29389 | 0'29673 | 0'29955 | 0'30234 | 0'30511 | 0'30785 | 0'31075 | 0'31327 |
| **0'9** | 0'31594 | 0'31859 | 0'32121 | 0'32381 | 0'32639 | 0'32894 | 0'33147 | 0'33398 | 0'33646 | 0'33891 |
| **1'0** | 0'34134 | 0'34375 | 0'34614 | 0'34850 | 0'35083 | 0'35313 | 0'35543 | 0'35769 | 0'35993 | 0'36214 |
| **1'1** | 0'36433 | 0'36650 | 0'36864 | 0'37076 | 0'37286 | 0'37493 | 0'37698 | 0'37900 | 0'38100 | 0'38298 |
| **1'2** | 0'38493 | 0'38686 | 0'38877 | 0'39065 | 0'39251 | 0'39435 | 0'39617 | 0'39796 | 0'39973 | 0'40147 |
| **1'3** | 0'40320 | 0'40490 | 0'40658 | 0'40824 | 0'40988 | 0'41149 | 0'41308 | 0'41466 | 0'41621 | 0'41774 |
| **1'4** | 0'41924 | 0'42073 | 0'42220 | 0'42364 | 0'42507 | 0'42647 | 0'42786 | 0'42922 | 0'43056 | 0'43189 |
| **1'5** | 0'43319 | 0'43448 | 0'43574 | 0'43699 | 0'43822 | 0'43943 | 0'44062 | 0'44179 | 0'44295 | 0'44408 |
| **1'6** | 0'44520 | 0'44630 | 0'44738 | 0'44845 | 0'44950 | 0'45053 | 0'45154 | 0'45254 | 0'45352 | 0'45449 |
| **1'7** | 0'45543 | 0'45637 | 0'45728 | 0'45818 | 0'45907 | 0'45994 | 0'46080 | 0'46164 | 0'46246 | 0'46327 |
| **1'8** | 0'46407 | 0'46485 | 0'46562 | 0'46638 | 0'46712 | 0'46784 | 0'46856 | 0'46926 | 0'46995 | 0'47062 |
| **1'9** | 0'47128 | 0'47193 | 0'47257 | 0'47320 | 0'47381 | 0'47441 | 0'47500 | 0'47558 | 0'47615 | 0'47670 |
| **2'0** | 0'47725 | 0'47778 | 0'47831 | 0'47882 | 0'47932 | 0'47982 | 0'48030 | 0'48077 | 0'48124 | 0'48169 |
| **2'1** | 0'48214 | 0'48257 | 0'48300 | 0'48341 | 0'48382 | 0'48422 | 0'48461 | 0'48500 | 0'48537 | 0'48574 |
| **2'2** | 0'48610 | 0'48645 | 0'48679 | 0'48713 | 0'48745 | 0'48778 | 0'48809 | 0'48840 | 0'48870 | 0'48899 |
| **2'3** | 0'48928 | 0'48956 | 0'48983 | 0'49010 | 0'49036 | 0'49061 | 0'49086 | 0'49111 | 0'49134 | 0'49158 |
| **2'4** | 0'49180 | 0'49202 | 0'49224 | 0'49245 | 0'49266 | 0'49286 | 0'49305 | 0'49324 | 0'49343 | 0'49361 |
| **2'5** | 0'49379 | 0'49396 | 0'49413 | 0'49430 | 0'49446 | 0'49461 | 0'49477 | 0'49492 | 0'49506 | 0'49520 |
| **2'6** | 0'49534 | 0'49547 | 0'49560 | 0'49573 | 0'49585 | 0'49598 | 0'49609 | 0'49621 | 0'49632 | 0'49643 |
| **2'7** | 0'49653 | 0'49664 | 0'49674 | 0'49683 | 0'49693 | 0'49702 | 0'49711 | 0'49720 | 0'49728 | 0'49736 |
| **2'8** | 0'49744 | 0'49752 | 0'49760 | 0'49767 | 0'49774 | 0'49781 | 0'49788 | 0'49795 | 0'49801 | 0'49807 |
| **2'9** | 0'49813 | 0'49819 | 0'49825 | 0'49831 | 0'49836 | 0'49841 | 0'49846 | 0'49851 | 0'49856 | 0'49861 |
| **3'0** | 0'49865 | 0'49869 | 0'49873 | 0'49877 | 0'49881 | 0'49885 | 0'49889 | 0'49893 | 0'49896 | 0'49899 |
| **3'1** | 0'49903 | 0'49906 | 0'49909 | 0'49912 | 0'49915 | 0'49918 | 0'49921 | 0'49923 | 0'49926 | 0'49929 |
| **3'2** | 0'49931 | 0'49933 | 0'49936 | 0'49938 | 0'49940 | 0'49942 | 0'49944 | 0'49946 | 0'49948 | 0'49950 |
| **3'3** | 0'49951 | 0'49953 | 0'49955 | 0'49956 | 0'49958 | 0'49959 | 0'49961 | 0'49962 | 0'49964 | 0'49965 |
| **3'4** | 0'49966 | 0'49967 | 0'49968 | 0'49970 | 0'49971 | 0'49972 | 0'49973 | 0'49974 | 0'49975 | 0'49976 |
| **3'5** | 0'49977 | 0'49977 | 0'49978 | 0'49979 | 0'49980 | 0'49981 | 0'49981 | 0'49982 | 0'49983 | 0'49983 |
| **3'6** | 0'49984 | 0'49985 | 0'49985 | 0'49986 | 0'49986 | 0'49987 | 0'49987 | 0'49988 | 0'49988 | 0'49989 |
| **3'7** | 0'49989 | 0'49990 | 0'49990 | 0'49990 | 0'49991 | 0'49991 | 0'49991 | 0'49992 | 0'49992 | 0'49992 |
| **3'8** | 0'49993 | 0'49993 | 0'49993 | 0'49994 | 0'49994 | 0'49994 | 0'49994 | 0'49995 | 0'49995 | 0'49995 |
| **3'9** | 0'49995 | 0'49995 | 0'49996 | 0'49996 | 0'49996 | 0'49996 | 0'49996 | 0'49996 | 0'49997 | 0'49997 |
| **4'0** | 0'49997 | 0'49997 | 0'49997 | 0'49997 | 0'49997 | 0'49997 | 0'49998 | 0'49998 | 0'49998 | 0'49998 |
| **4'1** | 0'49998 | 0'49998 | 0'49998 | 0'49998 | 0'49998 | 0'49998 | 0'49998 | 0'49998 | 0'49999 | 0'49999 |
| **4'2** | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 |
| **4'3** | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 |
| **4'4** | 0'49999 | 0'49999 | 0'49999 | 0'50000 | 0'50000 | 0'50000 | 0'50000 | 0'50000 | 0'50000 | 0'50000 |